

## 品質低下を考慮した2レベル貯蔵でのEOQモデル

01507094 大阪府立大学 総合科学部 \*北條仁志 HOHJO Hitoshi

01302694 大阪府立大学 総合科学部 寺岡義伸 TERAOKA Yoshinobu

## 1. はじめに

1958年 Wagner and Whitin [1] により EOQ モデルが世間に広められて以来、EOQ モデルに関連して数多くの研究がなされている。これらの多くは製品を貯蔵する倉庫が1箇所であると仮定している。Hartely [2] は2レベルの貯蔵をもつモデルを初めて提案した。Sarma [3] は2レベルの貯蔵(所有の倉庫とレンタル倉庫)をもつ確定的在庫モデルを線形傾向の需要において研究した。彼らは輸送費用が輸送量と独立で固定された定数であり、不足は許さないと仮定していた。我々は彼らのモデルをもとに、2レベルの貯蔵での線形傾向の需要における確定的在庫モデルを展開する。各倉庫において品質低下が起こり、販売に直結している倉庫において不足が許されると仮定する。

## 2. モデル

計画期間  $T$  において2レベルの貯蔵をもつ確定的在庫モデルが展開される。期首に量  $Q$  だけ製品が発注され、倉庫1と倉庫2の在庫レベルはそれぞれ貯蔵最大容量の  $Z, W$  となる。前期での不足に対して量  $S$  がバックオーダーされたとすると、システム全体でのロットサイズ  $Q$  は

$$Q = W + Z + S$$

と表せる。客の需要はすべて倉庫2から満たされ、時刻  $t$  での需要率は  $f(t) = a + bt$  ( $a, b$  は定数) で与えられている。一定の間隔  $\bar{T}$  で倉庫1から倉庫2へ製品の補充が起こり、倉庫2の在庫レベルは再び  $W$  に戻る。つまり、時刻  $i\bar{T}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  には倉庫2の在庫レベルは  $W - Q_i$  になっており、倉庫1から倉庫2へ  $Q_i$  単位が補充され、在庫レベルはもとの  $W$  に戻る。倉庫1での在庫レベルは連続的な品質低下による劣化と離散的な倉庫2への補充により減少する。倉庫2での在庫レベルは製品を保持している状態には劣化および需要により減少し、品切れの状態では需要のみにより減少する。 $\theta_1, \theta_2$  を倉庫1, 2で維持している在庫に対する一定の品質低下率とする。倉庫1の在庫がすべて消費されるまでこの過程が固定された間隔  $\bar{T}$  で繰り返される。不足は倉庫2でのみ許されている。補充量が初めて許容量  $W$  を越える補充時刻を  $k\bar{T}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) とする。需

要率は時刻に関する線形関数で与えられているので、 $k\bar{T}$ 以降の補充時刻  $j\bar{T}$ ,  $j = k+1, \dots, n-1$  では  $W$  より多くの量を補充することになる。 $t_{s_j}$ ,  $j = k, \dots, n$  を第  $j$  サイクルで在庫レベルが0に達する時刻とする。時刻  $n\bar{T}$  に最後の補充がされるが、補充量  $Q_n$  により不足の状態を解消できない場合について考える。時刻  $T$  までに満たされなかった未納量  $S$  は次のサイクルの初めに満たされる。 $K$  を1回当たりの発注費用、 $x$  を1回当たりの補充費用、 $c$  を単位当たりの購入費用とする。また、 $H_1, H_2$  を倉庫1, 2それぞれにおける単位時間単位当たりの維持費用、 $P$  を単位時間単位当たりの不足費用とする。

我々の問題は  $\bar{T}, T, n, t_{s_j}$ ,  $j = k, k+1, \dots, n$  とシステムの総期待コストの最適値を決定することである。最後の補充を除き、補充は常に在庫レベルがいっぱいになるようにされる。

## 3. 解析

倉庫1の在庫は連続的な時刻における品質低下と離散的な時刻  $i\bar{T}$ ,  $i = 1, \dots, n$  での倉庫2への補充により減少する。期間  $[i\bar{T}, (i+1)\bar{T})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  における時刻  $t$  での在庫レベル  $I_1(t)$  は境界条件  $I_1(i\bar{T}) = Z \exp\{-i\theta_1\bar{T}\} - \sum_{j=1}^i Q_j \exp\{-(i-j)\theta_1\bar{T}\}$  をもつ

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -\theta_1 I_1(t), \quad i\bar{T} \leq t < (i+1)\bar{T}, \\ i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

で表せる。これを解くと

$$I_1(t) = \left( Z - \sum_{j=1}^i Q_j \exp\{j\theta_1\bar{T}\} \right) \exp\{-\theta_1 t\}, \\ i\bar{T} \leq t < (i+1)\bar{T}, i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

を得る。ただし、 $i = 0$  のときは  $\sum$  の項は0と定義する。時刻  $n\bar{T}$  の補充によりすべての在庫が使い尽くされるので、期間  $[n\bar{T}, T]$  における在庫量は0である。

ゆえに、倉庫1における累積在庫量は

$$I_1^+ = \int_0^{\bar{T}} Z \exp\{-\theta_1 t\} dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}}$$

$$\begin{aligned} & \left( Z - \sum_{j=1}^i Q_j \exp\{j\theta_1 \bar{T}\} \right) \exp\{-\theta_1 t\} dt \\ &= \frac{1}{\theta_1} Z(1 - \exp\{-n\theta_1 \bar{T}\}) \\ & \quad - \frac{1}{\theta_1} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j (1 - \exp\{-(n-j)\theta_1 \bar{T}\}) \quad (3) \end{aligned}$$

時刻  $n\bar{T}$  に補充される量  $Q_n$  はその時点で倉庫 1 に残っている量であるので、

$$Q_n = \left( Z - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j \exp\{j\theta_1 \bar{T}\} \right) \exp\{-n\theta_1 \bar{T}\} \quad (4)$$

と表せる。

一方、倉庫 2 の在庫は需要と品質低下により減少し、時刻  $i\bar{T}$ ,  $i = 1, \dots, n$  には補充され、最後の補充を除いて常に倉庫がいっぱいになるように満たされる。期間  $[i\bar{T}, (i+1)\bar{T}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-2$  における時刻  $t$  での在庫レベル  $I_2(t)$  は境界条件  $I_2(i\bar{T}) = W$  をもつ

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -f(t) - \theta_2 I_2(t), \quad i\bar{T} \leq t < (i+1)\bar{T}, \quad i = 0, 1, \dots, k-2 \quad (5)$$

で表せる。これを解くと

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \left[ \exp\{i\theta_2 \bar{T}\} W - \int_{i\bar{T}}^t \exp\{\theta_2 u\} f(u) du \right] \\ & \quad \cdot \exp\{-\theta_2 t\} \\ &= \left( W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{ib}{\theta_2} \bar{T} \right) \exp\{-\theta_2(t - i\bar{T})\} \\ & \quad - \frac{b}{\theta_2} t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \quad (6) \end{aligned}$$

を得る。時刻  $i\bar{T}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  には倉庫 1 より量  $Q_i$  が補充され、倉庫 2 の在庫レベルは  $W$  に戻る。ここで、時刻  $i\bar{T}$ ,  $i = 1, \dots, k-1$  での補充量  $Q_i$  は

$$\begin{aligned} Q_i &= \left( W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{(i-1)b}{\theta_2} \bar{T} \right) \\ & \quad \cdot (1 - \exp\{-\theta_2 \bar{T}\}) + \frac{b}{\theta_2} \bar{T} \quad (7) \end{aligned}$$

である。今、 $i\bar{T} \leq t < (i+1)\bar{T}$ ,  $i = k-1, \dots, n-1$  における在庫レベルについて考える。期間  $[i\bar{T}, t_{s_{i+1}}]$  における時刻  $t$  での在庫レベルは (6) と同様である。期間  $(t_{s_{i+1}}, (i+1)\bar{T})$  における在庫レベル  $I_2(t)$  は境界条件  $I_2(t_{s_{i+1}}) = 0$  をもつ

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -f(t), \quad t_{s_{i+1}} < t < (i+1)\bar{T},$$

$$i = k-1, \dots, n-1 \quad (8)$$

で表せる。これを解くと

$$I_2(t) = -a(t - t_{s_{i+1}}) - \frac{b}{2}(t^2 - t_{s_{i+1}}^2) \quad (9)$$

を得る。時刻  $i\bar{T}$ ,  $i = k, \dots, n-1$  には補充  $Q_i$  により再び在庫レベルは  $W$  に戻る。ここで

$$\begin{aligned} Q_i &= W + a(t - t_{s_i}) + \frac{b}{2}(t^2 - t_{s_i}^2), \\ & \quad i = k, \dots, n-1 \quad (10) \end{aligned}$$

である。同様に、期間  $(n\bar{T}, T]$  における時刻  $t$  での在庫レベル  $I_2(t)$  は

$$I_2(t) = I_2(n\bar{T}) - a(t - n\bar{T}) - \frac{b}{2}(t^2 - n^2\bar{T}^2) \quad (11)$$

で表せる。

ゆえに、倉庫 2 における累積在庫量  $I_2^+$  は

$$\begin{aligned} I_2^+ &= \sum_{j=0}^{k-2} \int_{j\bar{T}}^{(j+1)\bar{T}} \left\{ \left( W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{jb}{\theta_2} \bar{T} \right) \right. \\ & \quad \cdot \exp\{-\theta_2(t - j\bar{T})\} - \frac{b}{\theta_2} t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \left. \right\} dt \\ & \quad + \sum_{j=k-1}^{n-1} \int_{j\bar{T}}^{t_{s_{j+1}}} \left\{ \left( W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{jb}{\theta_2} \bar{T} \right) \right. \\ & \quad \cdot \exp\{-\theta_2(t - j\bar{T})\} - \frac{b}{\theta_2} t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \left. \right\} dt \end{aligned}$$

であり、累積不足量  $I_2^-$  は

$$\begin{aligned} I_2^- &= \sum_{j=k}^n \int_{t_{s_j}}^{j\bar{T}} \left\{ a(t - t_{s_j}) + \frac{b}{2}(t^2 - t_{s_j}^2) \right\} dt \\ & \quad + \int_{n\bar{T}}^T \left\{ I_2(n\bar{T}) - a(t - n\bar{T}) - \frac{b}{2}(t^2 - n^2\bar{T}^2) \right\} dt \end{aligned}$$

である。よって最小化すべき目的関数は

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{T} \{ K + nx + (H_1 + \theta_1 c) I_1^+ \\ & \quad + (H_2 + \theta_2 c) I_2^+ + P I_2^- \} \quad (12) \end{aligned}$$

となる。詳細については当日の講演にて発表する。

#### 参考文献

- [1] H.M.Wagner and T.M.Whitin (1958) Dynamic version of the economic lot size model. Management Science, Vol.5, 89-96.
- [2] R.V.Hartely (1976) Operations Research - A Managerial Emphasis, Good Year Publishing Company, California 315-317.
- [3] K.V.S.Sarma (1983) A deterministic inventory model with two levels of storage and an optimum release rule, Opsearch, Vol.20, 175-180.