2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

同一並列機械ロットスケジューリング問題への列生成法の適用

(非会員) 早稲田大学経営システム工学科 *新井 裕明 ARAI Hiroaki
01603200 早稲田大学経営システム工学科 森戸 晋 MORITO Susumu
01012600 東洋大学経営学部経営学科 今泉 淳 IMAIZUMI Jun

1 問題の提示と従来研究

本研究では，同一性能の機械が複数並ぶ一工程並列機械問題をとりあげ，複数品種の所与の需要を最小費用で満たす生産ロットサイズとスケジュールを決定する．

具体的には計画期間を一定の時間に分けた離散時間モデルを考え，需要は動的かつ確定的に与えられる．満たせない需要はバックオーダされ，バックオーダにはペナルティがかかる．機械は同一性能であり，どの機械を使用することもできる．生産時には段取りが必要であり，ある品種を生産していた機械，もしくは非稼動状態にあった機械で，別の品種を生産する場合，品種依存の段取費と段取時間 (1期を想定) がかかるものとする．各期各機械は，特定の品種を生産可能上限まで生産するか，次期から特定の品種の生産を始めるために段取りをするか，非稼動かのいずれかとなる．各品種とも，1機械が1期に生産可能な量を1単位と基準化し，需要もこの単位で表現する．

単一機械ロットスケジューリング問題に対しては，ラグランジュ緩和法やメタ解法を用いた多くの研究があるが，Cattrysse et al.[1] は列生成法を適用し，双対ギャップや計算時間において良い結果を得ている．一方，複数機械問題には Campbell[2] のラグランジュ緩和法，Meyr[3] のメタ解法がある程度でほとんど手がつけられていない．そこで本研究では，同一並列機械問題に対する列生成法を構築し，数値実験によりその評価を行う．

2 整数計画問題としての定式化

品種 $i=1,\cdots,N$ を，$t=1,\cdots,T$ の計画期間において，M 台の機械で生産する同一並列機械ロットスケジューリング問題を考え，整数計画問題 (IP) として定式化する．

定数

d_{it}	t 期の品種 i の需要量
s_i	品種 i の段取費
p_i	品種 i の生産費
h_i	品種 i の在庫保管費
g_i	品種 i のバックオーダ費
I_{i0}^+	品種 i の初期在庫
I_{i0}^-	品種 i の初期バックオーダ量

決定変数

I_{it}^+	t 期末における品種 i の在庫量
I_{it}^-	t 期末における品種 i のバックオーダ量
x_{it}	t 期に品種 i を生産する機械台数
y_{it}	t 期に品種 i の段取をする機械台数

問題 (IP)

$$\min \quad z^{IP} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(s_i y_{it} + p_i x_{it} + h_i I_{it}^+ + g_i I_{it}^-) \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{N}(x_{it}+y_{it}) \le M \quad \forall t, \quad (2)$$

$$y_{it-1} \ge x_{it} - x_{it-1} \quad \forall i,t, \quad (3)$$

$$I_{it}^+ = I_{it-1}^+ - I_{it-1}^- + I_{it}^- + x_{it} - d_{it} \quad \forall i,t, \quad (4)$$

$$I_{i0}^+, I_{i0}^- = 0 \quad \forall i, \quad (5)$$

$$I_{it}^+, I_{it}^- \ge 0 \quad \forall i,t, \quad (6)$$

$$x_{it}, y_{it} \ge 0, integer \quad \forall i,t. \quad (7)$$

目的関数 (1) は，段取費，生産費，在庫保管費，バックオーダ費の総和の最小化である．(3) により生産は必ず段取りを必要とすることを示す．(4)，(6) は，在庫の推移を，(5) は初期在庫を示す．(2)，(7) から，段取および生産台数が非負整数であり，かつ，機械台数以上の段取もしくは生産ができないことを示している．

3 列生成法による解法

3.1 一般集合分割問題への再定式化

IP の品種 i の解集合 S_i は，a_i^k を品種 i に対する k 番目のスケジュールとすると，$S_i = \{a_i \in Z_+^T : (3),(4),(5),(6),(7)\} = \{a_i^k\}_{k=1}^{K_i}$ と表せる．ここで，a_i^k は T 次元の列ベクトルであり，その t 番目の要素 a_{it}^k は，品種 i における k 番目のスケジュールの t 期の利用機械台数 $(x_{it}+y_{it})$ である．スケジュール a_i^k の費用を c_i^k とすれば，IP は，一般集合分割問題として再定式化でき，これを主問題 (IPM) とする．

$$\text{主問題 (IPM)} \quad \min \quad z^{IPM} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_i} c_i^k \lambda_i^k \quad (8)$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_i} a_i^k \lambda_i^k \le M, \quad (9)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$\sum_{k=1}^{K_i} \lambda_i^k = 1 \quad \forall i, \tag{10}$$

$$\lambda_i^k \in \{0,1\} \quad \forall i,k. \tag{11}$$

ここで，λ_i^k は品種 i のスケジュール k を採択するとき1，さもなくば0の0-1変数とする．

3.2 LP/DPによる下界値算出と列生成

一般に整数計画問題は解きにくいので，(11) を線形緩和した問題 (**LPM**) を考える．また，問題 (**LPM**) は列数が膨大であるため，一部の列のみを持った限定主問題 (**RLPM**) を解く．**RLPM** の最適化は単体法を用いて行う．このとき，機械台数制約 (9) に対する被約費用を $\{\pi_t\}_{t=1}^T$，凸制約 (10) に対する被約費用を $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ とすると，**LPM** に対する現在の基底解の最適性は以下の式で判定することができる．

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \min\{c_i^k - (\sum_{t=1}^T \pi_t a_{it}^k + \mu_i)\} \\
&= \min\{c_i^k - (\sum_{t=1}^T \pi_t(x_{it} + y_{it}) + \mu_i)\} \\
&= \min\{\sum_{t=1}^T((s_i - \pi_t)y_{it} + (p_i - \pi_t)x_{it} \\
&\qquad + h_i I_{it}^+ + g_i I_{it}^-) - \mu_i\}
\end{aligned} \tag{12}$$

(12) より，$\xi_i < 0$ となる品種 i が一つでもあるならば最適でないので，被約費用を最小 (負) にする列を **RLPM** に追加する．つまり，**LPM** の最適性判定問題 (兼列生成) は，(12) を目的関数として最小化し，(2)(3)(4)(5)(6)(7) 式を制約条件とする，単品種同一並列機械ロットスケジューリング問題に帰着し，品種ごとの子問題に分解される．

子問題には，動的計画法を適用する．再帰関数 $F_t(\alpha,\gamma)$ を，t 期までの累積生産台数を α，t 期の生産機械台数を γ としたときの，t 期までの (生産費＋在庫保管費＋バックオーダ費) と $t-1$ 期までの段取費の和の最小値と定義する．

$$\begin{aligned}
F_t(\alpha,\gamma) = \\
&\min\{\min_{0\le\delta\le\gamma} F_{t-1}(\alpha-\gamma,\delta) + (s_i - \pi_t)(\gamma-\delta), \\
&\min_{\gamma<\delta\le M} F_{t-1}(\alpha-\gamma,\delta)\} \\
&+(p_i - \pi_t)\gamma + h_i I_{it}^+ + g_i I_{it}^-
\end{aligned} \tag{13}$$

ただし，$D_i = \sum_t d_{it}$，$I_{it}^+ = \max\{I_{i0}^+ - I_{i0}^- + \alpha - \sum_t d_{it}, 0\}$，$I_{it}^- = \min\{I_{i0}^+ - I_{i0}^- + \alpha - \sum_t d_{it}, 0\}$ とし，δ は，$t-1$ 期の生産機械台数である．このとき，子問題の最適値 ξ_i は $F_T(D_i,\gamma) - \mu_i$ となる．

3.3 実行可能解の算出

本研究では，列生成法によって線形緩和問題 (**LPM**) の最適解が得られた段階で，下界値算出の過程で生成された列をもとに分枝限定法 (商用パッケージを使用) を適用して実行可能解を生成する．

4 数値実験

数値実験では，計画期間の長さ T，品種数 N，機械台数 M を変え，線形緩和問題 (**LPM**) の最適解でIP最適解が求められた割合 (O)，双対ギャップ (ΔZ)，IP実行可能解が求められなかった割合 (I)，計算時間 (time) などを見る．また，同時にCampbell[2] のラグランジュ緩和法との比較を行い，列生成法の有効性を示す．なお，需要は生産可能量の70-90%としてランダムに生成する．各パラメータにつき20問生成する．表1に，実験結果の一部を示す．

表 1: 列生成法を用いた実験結果

(T,M,N)	O (%)	ΔZ (%)	I (%)	time (sec)
(20,2,3)	85.0	1.3	0.0	6.9
(20,2,5)	80.0	1.0	0.0	19.1
(20,4,3)	70.0	2.2	0.0	5.3
(20,4,5)	70.0	1.4	0.0	20.9
(40,2,3)	90.0	2.0	0.0	153.1
(40,2,5)	45.0	1.3	20.0	167.5
(40,4,3)	30.0	2.8	0.0	93.7
(40,4,5)	25.0	1.3	20.0	202.9

OPL Studio,CPU:Pentium4-2.20GHz,RAM:1024MB

表1より，多くの問題で **LPM** を解いただけでIP最適解が求められることがわかり，双対ギャップも3%以内に収まっている．線形緩和問題によるIP最適解の求まりやすさと双対ギャップのいずれも計画期間や品種数を大きくすると悪化するが，機械台数を大きくすると良くなることがわかる．これは品種数が増えると生成された列の組み合わせがしにくく，上界値が悪くなるためと考えられる．計算時間は表1の実験の範囲では十分小さく，列生成法が同一並列機械ロットスケジューリング問題に対して有効な方法を提供すると言える．

段取時間が存在するロットスケジューリング問題では，問題がIP実行可能かの判定自体に有効な方法がなく，表1に示す実験でIP実行可能解を得られなかった問題が，元々IP実行不可能であるか，列の組合せでIP実行可能解を生成できなかっただけなのかは不明である．

参考文献

[1] D. Cattrysse, M. Salomon, R. Kuik and L. N. V. Wassenhove, "A dual ascent and column generation heuristic for the discrete lotsizing and scheduling problem with setup times," *Management Science*, Vol.39, No.4, 1993, 477-486.

[2] G. M. Campbell, "Using short-term dedication for scheduling multiple products on parallel machines," *Production and Operations Management*, Vol.1, No.3, 1992, 295-307.

[3] H. Meyr, "Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines," *European Journal of Operational Research*, Vol.139, 2002, 277-292.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．