不確実な需要分布下でのリグレット最小化施設配置問題

02103800 筑波大学 ° 窪田 順次 KUBOTA Junji
01205430 筑波大学 鈴木 勉 SUZUKI Tsutomu

1．はじめに

施設配置を考える際，通常，供給側は不確実な将来予測の下で意思決定を行わなければならないため，結果的に利用者にとって不便となるリスクを伴う．従来の施設配置モデルのほとんどは需要分布が既知（所与）である問題であり，不確実な需要分布下での配置問題については，[2]による需要分布を確率密度関数で表したときのウェーバー問題についての考察や，[1], [3]らのシナリオ表現による需要分布を用いたリグレット指標の施設配置問題が見られるものの未だ研究の蓄積は少ない．本稿では，解の基本的特性を把握するため，需要分布がシナリオとして複数想定される時の施設配置問題を対象とし，意思決定基準の違いにより施設配置に違いが現れることを明らかにする．

2．意思決定基準

ある領域Sに n 個の施設を配置することを考え，その位置を $a=(a_1,\ldots,a_n)$ とし，利用者は最近隣の施設への配分されるとすれば，場所 x の利用者の移動距離は $t(x,a)=\min_k d(x,a_k)$ と書ける（$d(x,y)$は x,y 間の距離）．将来のある時点において需要分布 $f_i(x)$ が実現する確率が p_i $(0<p_i<1)$ である（確率は既知であるとする）というシナリオを想定し，これをシナリオ i とする．シナリオ i 実現時の移動距離を $t_i(x,a)$ と書けば，その時の需要重み付き総移動距離は $T_i(a)=\int_S f_i(x)t_i(x,a)dx$ と表せる．T_i を最小化する配置 $a_i^\circ=\arg\min_a T_i(a)$ を「シナリオ i 最適配置」と呼び，実現する移動距離及び総移動距離を $t_i^\circ(x)$, T_i° と表す．

シナリオが複数存在するとき，施設配置の意思決定基準としては以下のようなものが考えられる．

(i) 期待総移動距離最小化

総移動距離に関してシナリオについての移動距離の期待値を最小化する基準である．

$$\min_a \quad T(a)=\sum_i p_i T_i(a) \tag{1}$$

(ii) 最大総移動距離最小化

実現確率が小さくとも総移動距離が最も大きくなってしまうという最悪の結果をもたらすシナリオを想定し，その結果をできるだけ緩和する基準である．

$$\min_a \max_i \quad T_i(a) \tag{2}$$

上記２基準はいわば絶対評価指標であるが，我々が移動距離を評価する場合には，相対評価指標が相応しい場面も少なくない．元々不便であろうと思っていた利用者の近くに施設ができたとすれば，その利用者はたとえ平均以上の距離があってもプラスに評価するであろう．逆に便利であろうと思っていた人にとっては少し離れたところに配置されただけでマイナスに評価するであろう．

利用者は自分の目の前に施設があることを想定して評価するよりもむしろ，実現するであろうある施設配置を念頭に置いて，それとの乖離で評価を行うと考える．ここでは念頭に置く配置として，シナリオ i 最適配置を採用する．それらの中から各利用者にとって最も都合の良い配置を選び，その時の移動距離 $t^\circ(x)=\min_i t_i^\circ(x)$ と実現した配置による移動距離 $t_i(x,a)$ の乖離 $r(x,a)=t(x,a)-t^\circ(x)$ を「リグレット」と呼ぶ（負のリグレットも余剰として算入）．

(iii) 期待リグレット最小化

上述の乖離の総和の期待値を最小化する基準である．シナリオ i 実現時のリグレットを $r_i(x,a)$ と書けば，リグレットの総和は $R_i(a)=\int_S f_i(x)r_i(x,a)dx$ となる．この期待値の最小化問題は以下のようになる．

$$\min_a \quad R(a)=\sum_i p_i R_i(a) \tag{4}$$

$R_i(a)=\int_S f_i(x)\{t(x,a)-t^\circ(x)\}dx=T_i(a)-\text{const.}$ となることから，この問題は(i)と同義である．

(iv) 最大リグレット最小化

実現するであろう施設配置とは大きく異なる配置により，想定していた移動距離との乖離が最も大きい結果をもたらすようなシナリオに対し，その時の結果を緩和する基準である．

$$\min_a \max_i \quad R_i(a) \tag{5}$$

(iii)(iv)は負のリグレットについても算入しているが，次に，実現すると思っていた以上の移動距離が生じる場所の乖離のみを評価する指標として，既述の定義の代わりに正のリグレットのみを算入する非負リグレット $r^+(x,a)=\max\{t(x,a)-t^\circ(x),0\}$ を用いる．

(v) 期待非負リグレット最小化

シナリオ i 実現時の非負のリグレットの総和は $R_i^+(a)=\int_S f_i(x)r_i^+(x,a)dx$ となるので，その総和の期待値の最小化は以下のように記述できる．

$$\min_a \quad R^+(a)=\sum_i p_i R_i^+(a) \tag{7}$$

(vi) 最大非負リグレット最小化

最大非負リグレット最小化は以下のようになる．

$$\min_a \max_i \quad R_i^+(a) \tag{8}$$

3．単一施設配置問題

これらの問題を，単純な線分状都市[0,1]における単一施設配置を例に具体的に考える（図１）．将来はシナリオ１及び２の需要分布$f_1(x)=1, f_2(x)=2x$のいずれかが，それぞれ確率$p_1=p, p_2=1-p$で実現すると想定する（図２）．シナリオi実現時の総移動距離は$T_i(a)=\int_0^1|x-a|f_i(x)dx$で与えられ（図３），シナリオ$i$最適配置は$a_1^*=1/2,\ a_2^*=\sqrt{2}$，その時の総移動距離は$T_1^*=1/4,\ T_2^*=(2-\sqrt{2})/3$となる．リグレット$R_i(a)$は総移動距離からこれらを引いたものである(図３)．

基準(i)(iii)による配置は，$\partial T/\partial a=0$を解いて$a=(\sqrt{(1-p)^2+1}-p)/2(1-p)$となる(図５)．基準(ii), (iv)での配置はそれぞれa=1/2, a=0.611となる．(i)(iii)による配置はpが変化すると伴い緩やかに変化するが，(ii)の解はシナリオ１の最適配置と一致する．これに対し，(iv)の解はpによらず両シナリオの中間的な値になる．

一方，基準(v)及び(vi)での評価指標である非負リグレットは配置点aに対して図４のように変化する．(v)による配置は，$0.45\leq p\leq 0.56$の範囲では両シナリオの最適配置点の中間的な値をとるが，この範囲外ではシナリオ１または２の最適配置と一致する（図５）．このことは，(iii)に比べて中庸をとるよりも極端な配置の方が好ましい場合が多いことを意味する．この例については(v)の方が実現確率に対し感度の高い基準であるといえる．(vi)による配置はシナリオ１，２の最適配置の中点x=0.604とほぼ同じになる．

各基準による最適配置での総移動距離を，シナリオ１，２の需要分布で求めた（図６）．シナリオ２が実現すれば，需要分布が偏っているため，配置をx=1/2より右にずらす工夫により総移動距離をシナリオ１の時よりも小さくすることができる．期待値による配置の決定でも(i)(iii)による配置での総移動距離は確率pによって緩やかに変化している一方，(v)の総移動距離は$0.45\leq p\leq 0.56$の範囲でシナリオ１と２の総移動距離の差が急激に減少している．(ii)(iv)(vi)による配置での総移動距離は，シナリオ１については最適配置の時の総移動距離に近い値を示すが，シナリオ２については(ii)による配置の総移動距離が極端に大きくなっている．

4．まとめ

本稿では需要分布が不確実である場合の施設配置の意思決定基準を考え，基準により最適配置が異なることを示した．多施設，２次元の問題への拡張，施設数・設置タイミングの変数への取り込み，予測精度の影響やシナリオ実現確率未知の場合の検討，動学化と将来価値の割引率の考慮等の課題が残されている．

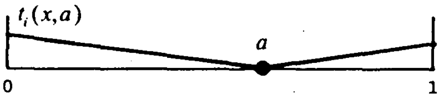

図１　線分状都市[0, 1]における各地点の施設までの移動距離

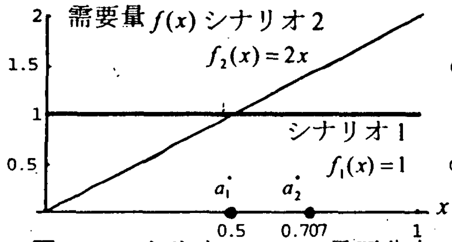

図２　シナリオ１，２の需要分布と最適配置

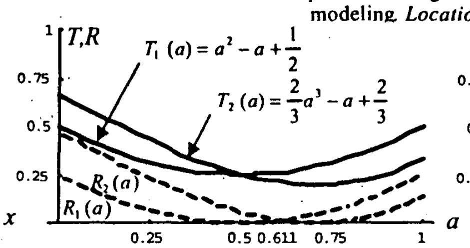

図３　配置と総移動距離・リグレット

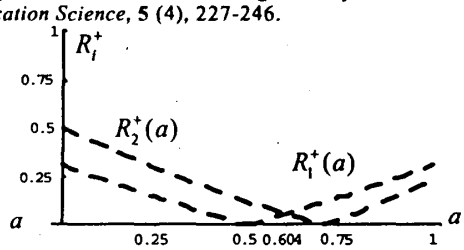

図４　配置に対する非負リグレット

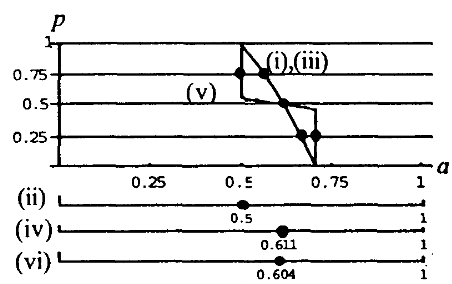

図５　実現確率と各基準による配置点の関係

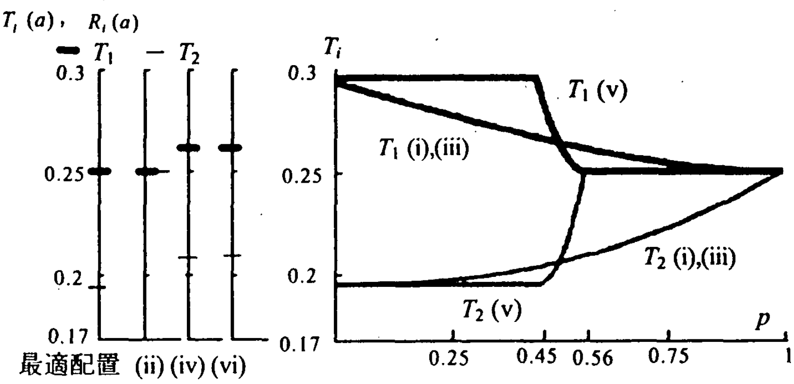

図６　各シナリオの基準別総移動距離

参考文献

[1] Averbakh, I. and Berman, O. (1997): Minimax regret p-center location on a network with demand uncertainty. *Location Science*, 5 (4), 247-254.

[2] Cooper, L. (1974): A random location equilibrium problem. *Journal of Regional Science*, 14 (1), 47-54.

[3] Daskin, M.S., Hesse, S. M. and ReVelle, C. S. (1997): α-reliable p-minimax regret: A new model for strategic facility location modeling. *Location Science*, 5 (4), 227-246.