

グラフ変換による marginal reliability importance 計算の効率化

01109114 流通科学大学 \*小出 武 KOIDE Takeshi  
 01205144 鹿児島大学 新森 修一 SHINMORI Shuichi  
 01005195 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki

1. はじめに

marginal reliability importance (MRI) とは、システムを構成する要素の信頼度を変化させたときにシステム全体の信頼度が変化する割合と定義される。MRI はシステム全体における各構成要素の重要度を示す指標である。本研究ではネットワーク型システムの各構成要素に対する MRI を計算する問題 (Complete Computation Problem for MRI: CCPMRI) を考える。

Hsu らは CCPMRI に対し、グラフ変換を利用した効率的な解法を提案した [1]。彼らの手法は、ネットワーク信頼度として 2 端子間信頼度を用い、グラフ変換によってその信頼度が多項式時間で計算できるネットワークのみを対象にしている。本研究ではネットワーク信頼度として総合信頼度を用い、任意の形状のネットワークに対して CCPMRI をより効率的に解くアルゴリズムを開発することを目的としている。

2. MRI の定義と問題の設定

要素数  $n$  の点集合  $V$ 、要素数  $m$  の枝集合  $E$  で構成されるネットワーク  $G = (V, E)$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  を考える。  $G$  において点は常に正常であるが、枝  $e_i$  は確率  $q_i (= 1 - p_i)$  で故障する。確率  $p_i$  を枝  $e_i$  の信頼度と呼び、各枝の信頼度は互いに独立とする。このとき、  $G$  が有する全点が正常な枝で連結される確率を総合信頼度といい、  $R(G)$  で表す。  $R(G)$  の計算は NP 完全であることが証明されている [2]。本研究では  $G$  は単純で連結であるネットワークとする。

ネットワーク  $G$  において、枝  $e_i \in E$  の MRI  $I_G(i)$  は次式で定義される。

$$I_G(i) \equiv \partial R(G) / \partial p_i = R(G * e_i) - R(G - e_i). \quad (1)$$

MRI の計算も  $R(G)$  と同様に NP 完全である。

ネットワーク  $G$  に属する枝  $e_i$  (以下  $e_i \in G$  と記す) の信頼度  $p_i$  を  $p_i + \delta$  に変更した場合、変更後のネットワーク  $G'$  の信頼度  $R(G')$  は次式で与えられる。

$$R(G') = R(G) + \delta I_G(i) \quad (2)$$

つまりある一本の枝の信頼度を向上させてネットワーク

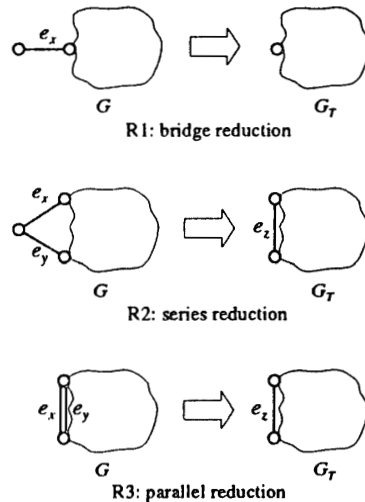


図 1: 総合信頼度に関する代表的なグラフ変換

の信頼度を増強する場合には、MRI の大きな枝を選択するのが効果的であることがわかる。このように MRI はネットワーク信頼度を増強させる上で重要な指標の一つである。CCPMRI の目的は、  $I_G(1), \dots, I_G(m)$  を計算することである。

3. 総合信頼度に関する代表的なグラフ変換

総合信頼度の計算時間を短縮するために、多くのグラフ変換が提案されている。図 1 に代表的なグラフ変換を 3 つ示した。それぞれの変換を R1, R2, R3 と名付ける。元のグラフと変換後のグラフの総合信頼度には以下の公理が成立する。

公理 1 (R1) グラフ  $G$  の橋  $e_x$  にグラフ変換 R1 を適用してグラフ  $G_T$  を構築するとき、次式が成立する。

$$R(G) = p_x R(G_T). \quad (3)$$

公理 2 (R2) グラフ変換 R2 によって、グラフ  $G$  中の直列枝  $e_x, e_y$  を枝  $e_z$  に変換してグラフ  $G_T$  を構築するとき、次式が成立する。

$$R(G) = (1 - q_x q_y) R(G_T). \quad (4)$$

ただし  $p_z = p_x p_y / (1 - q_x q_y)$  である。

公理 3 (R3) グラフ変換 R3 によって, グラフ  $G$  中の並列枝  $e_x, e_y$  を枝  $e_z$  に変換してグラフ  $G_T$  を構築するとき, 次式が成立する.

$$R(G) = R(G_T). \quad (5)$$

ただし  $p_z = 1 - q_x q_y$  である.

#### 4. グラフ変換を利用した MRI の計算

(1) より,  $R(G * e_i)$  と  $R(G - e_i)$  が計算できれば  $I_G(i)$  を求めることができる. そこでグラフ変換を施す前後二つのグラフにおける  $R(G * e_i)$  と  $R(G - e_i)$  に関する関係式を以下の補題にて証明した (証明略).

補題 1 グラフ  $G$  にあるグラフ変換を適用して構築したグラフを  $G_T$  とする.  $e_i \in G, e_i \in G_T$  ならば,

$$R(G * e_i) = cR(G_T * e_i), R(G - e_i) = cR(G_T - e_i). \quad (6)$$

$c$  はグラフ変換に関する係数で,  $R(G) = cR(G_T)$  である.

補題 2 グラフ  $G$  の橋  $e_x$  にグラフ変換 R1 を適用してグラフ  $G_T$  が構築されるならば,

$$R(G * e_x) = R(G_T), R(G - e_x) = 0. \quad (7)$$

補題 3 グラフ変換 R2 によって直列枝  $e_x, e_y$  を枝  $e_z$  に変換してグラフ  $G$  からグラフ  $G_T$  が構築されるならば,

$$R(G * e_x) = p_y R(G_T * e_z) + q_y R(G_T - e_z), \quad (8)$$

$$R(G - e_x) = p_y R(G_T - e_z). \quad (9)$$

補題 4 グラフ変換 R3 によって, 並列枝  $e_x, e_y$  を枝  $e_z$  に変換してグラフ  $G$  からグラフ  $G_T$  が構築されるならば,

$$R(G * e_x) = R(G_T * e_z), \quad (10)$$

$$R(G - e_x) = p_y R(G_T * e_z) + q_y R(G_T - e_z) \quad (11)$$

以上の結果を利用して CCPMRI に対するアルゴリズム CCPMRI-1 を開発した. この手法はグラフの形状を限定しない.

Procedure CCPMRI-1( $G = (V, E)$ )

1.  $G_0 \leftarrow G, k \leftarrow 0$ ;
2. **while**  $G_k$  can be applied by any reductions **do**
3.  $G_{k+1} \leftarrow$  the reduced network from  $G_k$ ;
4.  $k \leftarrow k + 1$ ; **end while**;
5. **for**  $e \in G_k$  **do** compute  $R(G_k * e)$  and  $R(G_k - e)$ ;
6. **for**  $l = k - 1$  to 0,  $e \in G_l$  **do**

7. compute  $R(G_l * e)$  and  $R(G_l - e)$  by (6)-(11);
8. **end for**;
9. **for**  $e_i \in G_0$  **do** output  $I_G(i) = I_{G_0}(i)$  by (1);
- end**.

#### 5. 異なる MRI 計算式を用いるアルゴリズム

(1) を変形すると次式が得られる (証明略).

$$I_G(i) = \{R(G) - R(G - e_i)\} / p_i. \quad (12)$$

(12) を用いる場合,  $I_G(1), \dots, I_G(m)$  のいずれにも  $R(G)$  を用いる. 従って (1) を用いる場合と比較して, その信頼度を計算するネットワークの個数は減少する. このことによって全体の計算時間を短縮することが期待できる. この手法によるアルゴリズム CCPMRI-2 を以下に示す.

Procedure CCPMRI-2( $G = (V, E)$ )

1.  $G_0 \leftarrow G, k \leftarrow 0$ ;
2. **while**  $G_k$  can be applied by any reductions **do**
3.  $G_k \leftarrow$  the reduced network from  $G_k$ ;
4.  $k \leftarrow k + 1$ ; **end while**;
5. **for**  $e \in G_k$  **do** compute  $R(G_k - e)$ ;
6. compute  $R(G_k * e_1)$ ;
7.  $R(G) \leftarrow p_1 R(G * e_1) + q_1 R(G - e_1)$ ;
8. **for**  $l = k - 1$  to 0 **do** compute  $R(G_l)$  by (3)-(5);
9. **for**  $e \in G_l$  **do** compute  $R(G_l - e)$ ;
10. **end for**;
11. **for**  $e_i \in G_0$  **do** output  $I_G(i) = I_{G_0}(i)$  by (12);
- end**.

Procedure CCPMRI-2 の 7 行目は factoring theorem[2] を利用した. factoring theorem は次式で与えられる.

$$R(G) = p_i R(G * e_i) + q_i R(G - e_i) \quad (13)$$

なお紙面の都合上, 両アルゴリズムの性能を評価するために行った数値実験の結果は当日発表させて頂く.

#### 参考文献

- [1] S. J. Hsu and C. C. Yuang: "Efficient computation of marginal reliability-importance for reducible<sup>+</sup> networks," *IEEE Trans. Rel.*, **50**, pp.98-106, 2001.
- [2] C. J. Colbourn: *Combinatorics of Network Reliability* (Oxford University Press, 1987).