一般分布で発生する要求の処理割当て問題

01302694　大阪府立大学 総合科学部　*寺岡義伸　TERAOKA Yoshinobu
01507094　大阪府立大学 総合科学部　北條仁志　HOHJO Hitoshi

1. モデル

本報告は、最適配置の問題を研究する過程において行き詰まりを感じ思いついたテーマ“既存の設備の中から目的にかなった設備を選び出し、発生する諸々の要求に対してどのように結びつけ組み合わせればシステム全体としての効率を高めることになるのか”に関しての第一歩である。

ある地域にm個の需要や要求を発生する地点とn個の発生した需要や要求を処理する地点が散在している。ここでは、前者を需要点と呼び、後者を施設と呼ぶことにする。需要点と施設はこの地域内の固定された点であるとする。需要点iでは、ある確率過程に従って単位時間当たり平均r_i個の要求が発生する。この需要は全需要点に対して共通の種目に対しての要求となっており、発生の仕方は各需要点に関して独立であるものとする$(i=1,\ldots,m)$。我々（行動決定者）は各需要点で発生した要求を処理するため、施設jへ送る（$j=1,\ldots,n$）。需要点iから施設jへ要求を送るに際してはd_{ij}の時間がかかるものとする。また施設jでは送られてきた各要求を処理するのにやはりある確率法則に従ってW_jの待ち時間とS_jの処理時間が必要となる。

ここで我々の問題は、需要点iで発生するrate r_iの要求をn個の施設の各々にどのように割り当てれば、最も効率良く、すなわち最短時間で処理できるかということである。需要点iで発生した要求をどの割合で施設jへ送るかを考える。そこで、

$x_{ij}=$ 需要点iでrate r_iのある確率過程（計数過程）に従って発生した要求のうち施設jへ配分されるrate

とすると

$$r_i = x_{i1}+\cdots+x_{in},$$
$$x_{i1}\geq 0,\ldots,x_{in}\geq 0,\quad i=1,\ldots,m$$

を満足するx_{ij}を決定することが我々の問題となる。そうすると施設jでは

$$x_j = x_{1j}+\cdots+x_{mj},\quad j=1,\ldots,n$$

を到着率とするある確率過程（計数過程）に従うことになり、各jでの処理時間もまたある確率分布に従うので、要求が発生してから処理を開始するまでの平均所要時間、各jでの平均処理時間、および需要点から施設への移動時間が我々の評価時間ということになる。目的は、このシステム全体で逐次発生する要求をその発生から処理完了までの期待時間を最小にするように配分$x_{ij}\geq 0$、ただし、$i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$を決定することである。

2. 一般的定式化

あるシステム内で複数の要求が発生し、これらの要求を複数の施設で処理しようとする場合、システム全体としての処理完了までの時間を最小にするとは、要求の発生地点から処理の施設までの移動時間を含め、待ち時間と処理時間の総和が最も長くかかりそうな需要点と施設の連結を最小時間で完了できるように要求の配分を割り当てることに他ならない。そう考えると我々のモデルは下記のように定式化できる。

W_j=施設jでの待ち時間を示す確率変数
S_j=施設jでの処理時間を示す確率変数
d_{ij}=需要点iから施設jへの移動時間

とすると

$$\min_X \max_{i,j}\{E(W_j+S_j)+u(x_{ij})d_{ij}\}$$

ここに、$E(Z)$は確率変数Zの期待値を意味し、$u(\cdot)$は

$$u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

であり、またXは制約条件を満足するmn組の配分$x_{ij}\geq 0$全体の集合である（$i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$）。制約条件は要求の発生に関しての確率過程と処理に対しての確率分布に応じて適当に付与されるであろうが、現時点のモデルに対しては

$$x_{1j}+\cdots+x_{mj}=x_j,\quad j=1,\ldots,n$$
$$x_{i1}+\cdots+x_{in}=r_i,\quad i=1,\ldots,m$$
$$x_{ij}\geq 0,\quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

のみである。そしてx_jは配分x_{ij}によって定められる。

一般にこの種の問題にあっては、$E(W_j+S_j)$は施設jへ割り当てられる要求の総和、すなわちx_jの増加関数として表現できると仮定しても不自然ではない。そこで、我々は

$$h_j(x_j)=E(W_j+S_j)$$

とおき、$h_j(x_j)$はx_jにつき厳密に単調増加と仮定する。また施設jには窓口が複数であっても$h_j(x_j)$の具体的な形が変化するのみでx_jについての増加関数と仮定しても何ら問題が生じない。

以上の仮定と条件の下で我々の問題をまとめると、次のような数理計画問題を得ることができる。

$$\min_{x_{ij}}\max_{i,j}[h_i(x_i)+u(x_{ij})d_{ij}] \qquad \text{(A)}$$

subject to

$$x_{i1}+\cdots+x_{in}=r_i,$$
$$x_{1j}+\cdots+x_{mj}=x_j,$$
$$x_{ij}\geq 0,$$
$$i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

ここに

$$u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

これは、非線形のmin max型数理計画問題であり、一般的取り扱いは非常に難しい。

3. 移動時間が一定のとき

この問題への出発点として需要点から施設への移動時間がそれらの位置関係とは無関係に与えられる場合、すなわち

$$d_{ij}=d,\quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

となっている場合を考察する。電話回線を利用した情報ネットワークや日本近辺へ到来した飛行機と空港の関係等は、このように仮定しても自然さを失わない。この場合、問題(A)の目的関数は

$$\min_{x_{ij}}\max_{i,j}[h_j(x_j)+u(x_{ij})d] = \min_{x_j}\max_{j}[h_j(x_j)]+d \qquad (1)$$

となり、x_jを決定する問題に転化される。$h_j(x_j)$はx_jにつき狭義単調増加を仮定していたので

$$h_1(x_1)=\cdots=h_n(x_n)=t \qquad (2)$$

とおき、$h_j(x_j)=t$の逆関数を$x_j=h_j^{-1}(t)$とおくと

$$h_1^{-1}(t)+\cdots+h_n^{-1}(t)=R \qquad (3)$$

を満たすtが唯1つ存在する。このtをt^*とおき、

$$x_j^*=h_j^{-1}(t^*)$$

とおくと

$$\min_{x_j}\max_{j}[h_j(x_j)]=h_j(x_j^*)=t^* \qquad (4)$$

を得る。このとき

$$h_j(x_j^*)=t^* \quad \text{for all } j \qquad (5)$$

であり、

$$x_1^*+\cdots+x_n^*=R \qquad (6)$$

である。

さて、(3)によってt^*が定まり、したがって$x_1^*,\ldots,x_n^*$が求まると、需要点iから施設jへの配分x_{ij}は

$$x_{i1}+\cdots+x_{in}=r_i,\quad i=1,\ldots,m$$
$$x_{1j}+\cdots+x_{mj}=x_j^*,\quad j=1,\ldots,n$$
$$x_{ij}\geq 0,\quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

を満足しなければならないから、需要点から施設への単位当たりの輸送費用が一定の輸送問題を解くことにより得られることになる。この解は無数に存在するが、北西隅法による解が簡便な解法といえよう。

4. 移動時間が一般の場合

以下、詳細については当日の講演にて発表する。

参考文献

[1] Berman, O. and Larson, R. (1985) Optimal 2-Facility Network Districting in the Presence of Queuing, Transportation Science, Vol.19, pp.261-277.

[2] Cooper, R.B. (1990) Queuing Theory. In Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol.2, D.P.Heyman and M.J.Sobel (eds). North-Holland, New York.

[3] Drezner (Editor). (1997) Facility Location: A Survey of Applications and Methods. Springer; New York.

[4] Hotelling, H. (1929) Stability in Competition, The Economic Journal, Vol.30, pp.41-57.