Gale-Shapleyの安定マッチングアルゴリズムの$\mathrm{M}^\natural$凹関数対への拡張

02005304　大阪大学　*江口 明伸　EGUCHI Akinobu
01502254　大阪大学　藤重 悟　FUJISHIGE Satoru

1. はじめに

最近, Fleiner [2] はGale-Shapleyの安定マッチング問題 [4] を線形順序付きマトロイドの対に拡張し, 安定マッチング定理と一般化したGale-Shapleyアルゴリズムを示した. ここでは, Fleinerのマトロイド安定マッチング問題をさらに$\mathrm{M}^\natural$凹関数 [5], つまり, 粗代替性を満たす効用関数の対に拡張することを考える. 本文では, この一般化したGale-Shapleyのアルゴリズムを提案し, 一般化安定マッチングの存在を証明する.

2. 一般化安定マッチング

Eを空でない有限集合とし, 任意のベクトル$p \in \mathbb{R}^E$と任意の集合$X \subseteq E$に対して, $p(X) = \sum_{e \in X} p(e)$, $p(\emptyset) = 0$と定義する. ここで, 空でない有効定義域$\mathrm{dom} f \equiv \{X \mid X \subseteq E, f(X) > -\infty\}$をもつ (効用) 関数$f : 2^E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$を考える. このとき, 関数$f$は以下の粗代替性 (GS) を満たすと仮定する.

(GS) $p \leq q$であるような任意のベクトル$p, q \in \mathbb{R}^E$に対して, $f(X) - p(X)$ $(X \subseteq E)$を最大化する集合をX_pとする. このとき, $F \equiv \{e \in E \mid p(e) = q(e)\}$に対して, $X_q \supseteq F \cap X_p$となるような$f(X) - q(X)$ $(X \subseteq E)$を最大化するX_qが存在する.

このような集合関数fは丁度2^E上の$\mathrm{M}^\natural$凹関数と同一である [3].

$f_A, f_B : 2^E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$を$\mathrm{M}^\natural$凹関数とする. 次の3式を満たすような$F_A, F_B \subseteq E$が存在するとき, $X \in \mathrm{dom} f_A \cap \mathrm{dom} f_B$を$f_A f_B$-安定マッチングという.

$$F_A \cup F_B = E$$
$$f_A(X) = \max\{f_A(Y) \mid Y \subseteq F_A\}$$
$$f_B(X) = \max\{f_B(Y) \mid Y \subseteq F_B\}$$

以下では, 次の (A1), (A2) が成り立つものと仮定する.

(A1) 有効定義域$\mathrm{dom} f_A, \mathrm{dom} f_B$は遺伝的である. つまり, $X_1 \subseteq X_2 \in \mathrm{dom} f_A$ $(\mathrm{dom} f_B)$のとき, $X_1 \in \mathrm{dom} f_A$ $(\mathrm{dom} f_B)$である.

(A2) $f_A(X)$ $(X \in \mathrm{dom} f_A)$と$f_B(X)$ $(X \in \mathrm{dom} f_B)$の値は全て異なる.

3節に示す一般化されたGale-Shapleyのアルゴリズムによって, 次の主定理を証明することができる.

定理 1: 仮定 (A1) と (A2) が成り立つような任意の2^E上の$\mathrm{M}^\natural$凹関数f_Aとf_Bに対し, $f_A f_B$-安定マッチングが存在する. □

次に, $\mathrm{M}^\natural$凹関数の基本的性質を補題2で述べる.

補題 2: 仮定 (A2) が成り立つような任意の$\mathrm{M}^\natural$凹関数$f : 2^E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$を考える. $F'' \subseteq F'$であるような任意の集合$F', F'' \subseteq E$に対して,

$$X' = \arg\max\{f(Y) \mid Y \subseteq F'\},$$
$$X'' = \arg\max\{f(Y) \mid Y \subseteq F''\}$$

ならば, $X'' \supseteq F'' \cap X'$が成り立つ. □

3. Gale-Shapleyのアルゴリズムの拡張

仮定 (A1), (A2) を満たす2^E上の$\mathrm{M}^\natural$凹関数をf_A, f_Bとする. このとき, $f_A f_B$-安定マッチングを求めるアルゴリズムが以下のように与えられる.

アルゴリズム

Step 0: $Z \leftarrow E$とおく.

Step 1: $X_B = X_A$となるまで (*) を繰り返す.

(*) $X_A \leftarrow \arg\max\{f_A(Y) \mid (X_B \subseteq) Y \subseteq Z\}$
$X_B \leftarrow \arg\max\{f_B(Y) \mid Y \subseteq X_A\}$
$Z \leftarrow Z \setminus (X_A \setminus X_B)$

$\hat{X} = X_A$ を返す.

仮定 (A1) よりX_A, X_Bは有効定義域の中に存在し, アルゴリズムは (*) を多くとも$|E|$回反復して停止する. 以下にアルゴリズムの正当性を証明する.

アルゴリズム中で (*) をi回繰り返して得られるX_A, X_B, Zをそれぞれ$X_A^{(i)}, X_B^{(i)}, Z^{(i)}$とおく. ここで, n回目の反復の後, 出力を得るものとする.

補題2より, 次の補題3が成り立つ.

補題 3: 任意の$i = 1, 2, \cdots, n-1$に対して,

$$X_A^{(i+1)} = \arg\max\{f_A(Y) \mid X_B^{(i)} \subseteq Y \subseteq Z^{(i)}\}$$

が成り立つ. □

さらに,

補題 4: 任意の$i = 1, 2, \cdots, n$に対して,

$$X_B^{(i)} = \arg\max\{f_B(Y) \mid Y \subseteq \textstyle\bigcup_{k=1}^{i} X_A^{(k)}\}$$

が成り立つ. □

定理 5: アルゴリズムの出力 $\hat{X}$ は $f_A f_B$-安定マッチングである.

(証明) 最終的に得られた Z に対して, 補題 4 より,

$$\hat{X} = \arg\max\{f_A(Y) \mid Y \subseteq Z\},$$
$$\hat{X} = \arg\max\{f_B(Y) \mid Y \subseteq \bigcup_{k=i}^{n} X_A^{(k)}\}$$

が成り立つ. ここで, $Z = E \setminus (\bigcup_{k=1}^{n}(X_A^{(k)} \setminus X_B^{(k)}))$ より, $Z \cup (\bigcup_{k=1}^{n} X_A^{(k)}) = E$ となる. □

以上で, 定理 1 が示された.

4. 議論

任意の $X \in \mathrm{dom} f_A$ について,

$$\mathcal{Z}_A(X) = \{Z \mid X = \arg\max\{f_A(Y) \mid Y \subseteq Z\}\}$$

と定義する.

補題 6: $\mathcal{Z}_A(X)$ は集合の合併に関して閉じている. □

補題 6 より, $\mathcal{Z}_A(X) \neq \emptyset$ のとき, $\mathcal{Z}_A(X)$ の最大元を $D_A(X)$ とおく. $\mathcal{Z}_A(X) = \emptyset$ のとき, $D_A(X)$ は定義されないものとする. このようにして定義した $D_A(X)$ を f_A の X-支配集合と呼ぶ. また, $D_B(X)$ も同様に定義する. $X \in \mathrm{dom} f_A \cap \mathrm{dom} f_B$ が $f_A f_B$-安定マッチングであることと, $D_A(X) \cup D_B(X) = E$, あるいは, E の全ての要素が f_A または f_B の X-支配集合に属していることとは等価である.

補題 7: 前節のアルゴリズムで最終的に得られた Z と出力 $\hat{X}$ に対して, $Z = D_A(\hat{X})$ が成り立つ. □

任意の $X \subseteq E$ に対して, $\arg\max\{f_A(Y) \mid Y \subseteq X\}$ を $M_A(X)$ とおく. ここで, $M_A(X)$ は (A1) を満たす全ての $X \subseteq F$ に対して定義されることに注意する. ゆえに, $D_A(X) = D_A(M_A(X))$ と定義できる. このようにして, $D_A(X)$ の定義域を 2^E 上に拡張する.

補題 8: 関数 $D_A : 2^E \to 2^E$ は閉包演算子である. つまり, 以下の (1)~(3) が成り立つ.

(1) $\forall X \subseteq E : X \subseteq D_A(X)$

(2) $\forall X \subseteq E : D_A(D_A(X)) = D_A(X)$

(3) $\forall X_1 \subseteq X_2 \subseteq E : D_A(X_1) \subseteq D_A(X_2)$ □

さらに, 以下が成り立つ.

補題 9: K, L を $f_A f_B$-安定マッチングとし,

$$K \vee L = \arg\max\{f_A(Y) \mid Y \subseteq K \cup L\}$$

と定義する. このとき,

$$K \vee L = \arg\max\{f_A(Y) \mid Y \subseteq D_A(K) \cup D_A(L)\}$$
$$K \vee L \subseteq \arg\max\{f_B(Y) \mid Y \subseteq D_B(K) \cap D_B(L)\}$$

が成り立つ. □

また, 双対的に

$$K \wedge L = \arg\max\{f_B(Y) \mid Y \subseteq K \cup L\}$$

と定義すると,

$$K \wedge L = \arg\max\{f_B(Y) \mid Y \subseteq D_A(K) \cup D_A(L)\}$$
$$K \wedge L \subseteq \arg\max\{f_A(Y) \mid Y \subseteq D_B(K) \cap D_B(L)\}$$

が成り立つ.

5. 結論

以上の議論は仮定 (A1), (A2) と補題 2 にのみ依存している. ゆえに (A1), (A2) を満たす集合関数, つまり, 次の (†) を満たす集合関数 $f : 2^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ のクラスに対して, 一般化した Gale-Shapley のアルゴリズムと, 本文に示した定理, 補題が成り立つ.

(†) $F_1 \subseteq F_2$, $2^{F_1} \cap \mathrm{dom} f \neq \emptyset$ となるような任意の集合 $F_1, F_2 \subseteq E$ と関数 f を 2^{F_2} 上で最大化する集合 X_2 に対して, 関数 f を 2^{F_1} 上で最大化する X_1 で, $X_2 \cap F_1 \subseteq X_1$ を満たすものが存在する.

このような関数についての研究は今後の課題である.

なお, Adachi [1] と Fleiner [2] によって展開された Tarski の不動点定理に基づく理論の枠組みによって, 本文の結果および束構造を示すことが可能である (このことを指摘してもらった Tamás Fleiner 氏並びに有益なコメントをもらった室田一雄氏, 田村明久氏, 塩浦昭義氏に感謝する).

本文は科研費補助金 (基盤研究 (B)) による研究である.

参考文献

[1] H. Adachi: On a characterization of stable matchings. *Economics Letters* **68** (2000) 43–49.

[2] T. Fleiner: A matroid generalization of the stable matching polytope. IPCO 2001 *LNCS* **2081** (2001) 105–114.

[3] S. Fujishige and Z. Yang: A note on Kelso and Crawford's gross substitutes condition. *Mathematics of Operations Research* (to appear).

[4] D. Gale and L. S. Shapley: College admissions and stability of marriage. *American Mathematical Monthly* **69** (1962) 9–15.

[5] K. Murota: *Discrete Convex Analysis* (SIAM) (to appear).