2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

離散最適化アルゴリズムの2次計画問題への応用

01011845 岡山理科大学 *岩崎 彰典
関西大学 塩村 尊
01402374 関西大学 仲川 勇二

1 まえがき

本稿は2次計画問題を加法的分離可能(additively separable)な目的関数を持つ最適化問題に帰着させ，後者の繰り返し最適化により前者の最適解が得られることを示すと共にNakagawa[1, 2]のSlicing Approach(以下SAと略記する)が2次計画問題にも応用可能であることを示唆するものである．

2 離散最適化アルゴリズムと2次計画法

2次計画問題I:

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

$$\text{subject to} \sum_{j=1}^{n} r_jx_j \geq R, \tag{2}$$

を考える．但し，$r_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n, R > 0$かつ$A \equiv [a_{ij}]$は正定符号行列とする．

一般に，問題Iの目的関数は加法的分離可能ではない．従って，この問題に対してSAを直接適用することはできないが，塩村[3]で示した通り変数の直交変換を行うことにより問題Iの目的関数は制約条件と共に分離可能になり，SAの適用が可能になる．但し，SAを用いるためには実行可能解を有限集合により与えておく必要がある．

直交変換を用いて問題を解く場合，Aの全ての固有値と対応する固有ベクトルを予め算出しておく必要があるが，規模の大きな問題に対しては，これは必ずしも容易な作業ではない(Press et al., [4])．そこで以下では塩村[3]とは異なる新たな分離可能な問題を定式化し，これと2次計画問題との関係を示すと共に幾つかの数値実験を試み，SAの応用可能性を検討する．

3 2次計画問題の繰り返し最適化

問題Iの最適解が$x^* > 0$であると仮定すると，最適化条件より

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{ij} - \frac{r_i}{r_n}a_{jn}\right)\left(\frac{x_i^*}{x_n^*}\right) = \left(\frac{r_i}{r_n}a_{nn} - a_{in}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_jx_j^* = R, \tag{4}$$

を得る．

一方，パラメータ$\beta_{in} > 0, i = 1, 2, \ldots, n-1$の初期値を適切に与え，

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\beta_{ji}} = \frac{\beta_{in}}{\beta_{jn}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

と定義する．問題Iにおいてx_ix_jを$(x_i^2 + \beta_{ij}^2x_j^2)/2\beta_{ij}$で置き換えた問題II:

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{x_i^2 + \beta_{ij}^2x_j^2}{2\beta_{ij}}\right), \quad x \geq 0, \tag{6}$$

$$\text{subject to} \sum_{j=1}^{n} r_jx_j \geq R, \tag{7}$$

の最適解が$\bar{x} > 0$であり，かつ少なくとも一つのiに対して$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_{ji} \neq 0$であると仮定すると，問題IIの最適化条件より

$$\left(\frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_n}\right) = \frac{r_i\sum_{j=1}^{n} a_{jn}\beta_{jn}}{r_n\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_{ji}} = \frac{r_i\sum_{j=1}^{n} a_{jn}\beta_{jn}}{r_n\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\beta_{jn}/\beta_{in})},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j\bar{x}_j = R, \tag{9}$$

を得る．

問題IIは任意の$\beta_{ij} > 0$に対して凸計画とはならないため，上の2式は必ずしも最小化のための十分

条件にはならない．但し，Aが正定符号かつ正行列であるならば，解の存在と一意性は容易に確認され，上式は必要かつ十分条件になる．以下では(8)，及び(9)が最小化問題の十分条件にもなっていると仮定して議論を続ける．

問題IIの最適解はパラメータβに依存するが，(8)式右辺を$f^i(\beta)$と置き，その不動点をβ^*で表すと，(8)より

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left[a_{ij}-\frac{r_i}{r_n}a_{jn}\right]\beta^*_{jn}=\left[\frac{r_i}{r_n}a_{nn}-a_{in}\right],$$

$$i=1,2,\ldots,n-1, \qquad (10)$$

を満たさねばならない．そこで(3)と(10)を比較すると，$n-1$次正方行列

$$B\equiv\left[a_{ij}-\frac{r_i}{r_n}a_{jn}\right] \qquad (11)$$

が正則であるならば$\beta^*_{jn}=x^*_j/x^*_n, j=1,2,\ldots,n-1$が成立しなければならないことが分かる．又，この時(4)，(9)より

$$\bar{x}_n=\frac{R}{\sum_{j=1}^{n}r_j\beta^*_{jn}}=x^*_n \qquad (12)$$

となるので$x^*_i=\beta^*_{in}\bar{x}_n, i=1,2,\ldots,n$となる．

一般的な問題に対して不動点への収束条件を導出することは困難であるが，当該問題が各変数について対称的になっている特殊ケース，即ちA，及びrが各々，

$$a_{ij}\doteq\begin{cases}1, & i=j\\ 1/2, & i\neq j\end{cases},1\leq i,j\leq n, \qquad (13)$$

$$r_k=1,k=1,2,\ldots,n, \qquad (14)$$

にほぼ等しい場合，$\beta_{in}=1,i=1,2,\ldots,n-1$を初期値として不動点に収束することが保証される．

4　計算機実験

問題IIは加法的分離可能であり，変数を離散化することにより，SAを適用することができる．このために有界な探索区間$\mathcal{S}_i\subset R$を設定し，$x_i\in\mathcal{S}_i, 0<x_i\leq X_i$とする．又，実行可能領域$\mathcal{F}\subset\mathcal{S}\equiv\prod_i\mathcal{S}_i$は非空であると仮定する．実験では$X_i=1$とし，$\mathcal{F}$が空にならないように(2)の$R$を調節した．

特殊なケース(13)，(14)では1000変数規模でも収束し，その解はCPLEXによる解と一致する．対称性が強いケース，

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\quad 1\leq i,j\leq n,\\ 0.1m, & i\neq j,\quad m=1,2,\ldots,9,\end{cases} \qquad (15)$$

かつ

$$r_k=1,k=1,2,\ \ldots,n, \qquad (16)$$

においても収束し，CPLEXによる解と一致することが確認された．

現在，(13)，(14)を基準として摂動を加え，収束性を検討しているが，摂動が大きい場合，必ずしもAは正定符号行列にならないためAが正定符号であるか否かをチェックしつつ実験を続けている．

5　まとめ

本手法は連続な非線形計画問題を離散化し，これを離散最適化の手法で解くこと試みたものである．現実の問題には本質的に離散最適化として定式化されるべきものが多く，このような問題に対して本手法は有効であると思われる．

参考文献

[1] Nakagawa, Y., "A reinforced surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming." RIMS 1068, Kyoto University, pp. 194-202, 1998.

[2] Nakagawa, Y., "An improved surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming." (投稿中)

[3] 塩村　尊, "離散最適化アルゴリズムのポートフォリオ選択問題への応用", 情報技術と最適化アルゴリズム研究報告書, pp. 43-50, 関西大学工業技術研究所, 2002.

[4] Press, W. H., S. A.Teukolsky, W.T. Vetterling and B. P. Flannery著, 丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠訳『ニューメリカルレシピ・イン・シー』, 技術評論社, 1993.