一般化ナップサック共有問題の一解法

02502630 防衛大学校情報工学科 *藤本 晶子 FUJIMOTO Masako
01700900 防衛大学校情報工学科 山田 武夫 YAMADA Takeo
01107880 防衛大学校情報工学科 片岡 靖詞 KATAOKA Seiji
01901000 防衛大学校情報工学科 渡辺 宏太郎 WATANABE Kotaro

1 はじめに

1.1 定式化

s 人のプレーヤーが n 個の商品の集合 $N := \{1,2,\cdots,n\}$ を容量 C のナップサックに収容するゲームを考える．各商品 $j \in N$ には重量 w_j と利得 p_j が付与されていて，商品の集合 N は共通商品群 N_0 と s 個の個別商品群 $N_1, N_2, \cdots, N_s$ に分かれているとする．ここで，プレーヤー i の利得はナップサック中の $N_0 \cup N_i$ の商品の利得の総和で，我々はこれらの最小値を最大化することを目的とする．この問題を以下では **一般化ナップサック共有問題** (generalized knapsack sharing problem: GKSP) と呼ぶ．決定変数 x_j を，商品 j を採択するとき 1，そうでないとき 0 とし，商品の組合せを $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と記すと，GKSP は次のように定式化される．

GKSP:

$$\text{Max} \quad \min_{1 \leqq k \leqq s} \{z^0(\boldsymbol{x}) + z^k(\boldsymbol{x})\} \tag{1}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j \in N} w_j x_j \leqq C \tag{2}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad (j \in N) \tag{3}$$

ここで，

$$z^k(\boldsymbol{x}) := \sum_{j \in N_k} p_j x_j \tag{4}$$

であり，更に，z^* を GKSP の最適目的関数値，N_X を個別商品の集合と定義する．

1.2 問題の分割

GKSP を解くために，以下の２つの問題を考える．これらについては，すでにある程度のサイズの問題を解くことが出来る厳密解法が存在する [1]．

$\mathrm{KP}_k(c)$:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z^k(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j \in N_k} w_j x_j \leqq c \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad (j \in N_k) \end{aligned}$$

$\mathrm{KSP}(c')$:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \min_{1 \leqq k \leqq s} z^k(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j \in N_x} w_j x_j \leqq c' \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad (j \in N_X) \end{aligned}$$

ここで，$z^*_{\mathrm{KP}}(c)$，$z^*_{\mathrm{KSP}}(c')$ をそれぞれ $\mathrm{KP}_0(c)$，$\mathrm{KSP}(c')$ の最適目的関数値とすると，GKSP は以下のようになる．

GKSP:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z^*(c) := z^*_{\mathrm{KP}}(c) + z^*_{\mathrm{KSP}}(C - c) \\ \text{s. t.} \quad & 0 \leqq c \leqq C \end{aligned}$$

2 上下界値

2.1 連続緩和

GKSP の上下界値を得るため，$\mathrm{KP}_k(c)$ 及び $\mathrm{KSP}(c')$ の連続緩和問題を $\overline{\mathrm{KP}}_k(c)$，$\overline{\mathrm{KSP}}(c')$ とし，それらの最適目的関数値をそれぞれ $\bar{z}_{\mathrm{KP}_k}(x)$，$\bar{z}_{\mathrm{KSP}}(c')$ とする．このとき，以下の定理が得られる．

定理 1 $\bar{z}_{\mathrm{KP}_k}(c)$ は c について区分的に線形，単調非減少な，凹関数である．

定理 2
ｉ) $\bar{z}_{\mathrm{KSP}}$ は $\bar{z}_{\mathrm{KP}_k}(\cdot)$ を横方向に加え合わせて得られる．
ii) $\bar{z}_{\mathrm{KSP}}$ は c' について区分的に線形，単調非減少な，凹関数である．

2.2 上界値

定理 1，2 より，$\bar{z}(c) := \bar{z}_{\mathrm{KP}_0}(c)+\bar{z}_{KSP}(C-c)$ とすると，$\bar{z}(c)$ は凹関数である．この最大値を $\bar{z}$，このときの容量を $\bar{c}$ とすると，明らかに $\bar{z}$ は GKSP の上界値である．

2.3 下界値

$\bar{c}$ について，$\mathrm{KP}_0(\bar{c})$, $\mathrm{KSP}(C-\bar{c})$ を厳密に解くと，$\underline{z} := z^*_{\mathrm{KP}_0}(\bar{c}) + z^*_{\mathrm{KSP}}(C-\bar{c})$ は，明らかに GKSP の一つの下界値である．

3 厳密解法

定理 3 $z^*_{\mathrm{KP}}(c)$ は階段関数で，単調非減少である．

$\underline{c}_L$，$\underline{c}_U$ を，$\bar{z}(c)$ と $z=\underline{z}$ の交点とする．GKSP の厳密解法として，以下を提案する．

解法 0 $[\underline{c}_L, \underline{c}_U]$ 間の $z^*_{\mathrm{KP}}(c)$ の各不連続点 c で，$\mathrm{KP}(c)$, $\mathrm{KSP}(C-c)$ を厳密に解き，$z^*(c)$ を最大とする $c=c^*$ を求める．

解法 1 同上の各不連続点 c で，次を実行する．

(1) $\mathrm{KP}(c)$ を解き，$z^*_{\mathrm{KP}}(c)$ を得る．

(2) $\mathrm{KSP}(C-c)$ の最適目的関数値が $\underline{z}-z^*_{\mathrm{KP}}(c)$ より大かどうか調べる．Yes なら (3) へ，No なら (4) へ進む．

(3) $\mathrm{KSP}(C-c)$ を解き，$z^*_{\mathrm{KSP}}(C-c)$ を得る．$\underline{z}$ を $\underline{z} \leftarrow z^*(c)$ により更新．

(4) 次の不連続点へ進む．

解法 1 において，(2) のチェックは

$$\bar{z}_{\mathrm{KSP}}(C-c) > \underline{z} - z^*_{\mathrm{KP}}(c) \qquad (5)$$

により判定する．この部分を

$$\sum_{k=1}^{s} \lfloor \bar{z}^{-1}_{\mathrm{KP}_k}(\underline{z} - z^*_{\mathrm{KP}}(c)) \rfloor < C-c \qquad (6)$$

により判定するようにした方法を，**解法 2** とする．

4 計算例

$s=2$, $n=60$, $C=15000$ で，p_j, w_j を $[1,1000]$ 間でランダムに発生した例を考える．これらについて，$\bar{z}_{\mathrm{KP}_k}(\cdot)$, $\bar{z}_{\mathrm{KSP}}(\cdot)$, $\bar{z}(\cdot)$ を図 1 に示す．これより，$\bar{c}=8248$, $\bar{z}=14405.7$ を得，更に $\underline{z}=14184$, $\underline{c}_L=6233.9$, $\underline{c}_U=9720.4$ となる．図 2 は $[\underline{c}_L, \underline{c}_U]$ 間での $z^*_{\mathrm{KP}}(\cdot)$ を表す．この区間に 19 個の不連続点があり，これらで KSP を解いて，$c^*=7106$ のとき最適値 $z^*=14296$ を得る（図 3）．

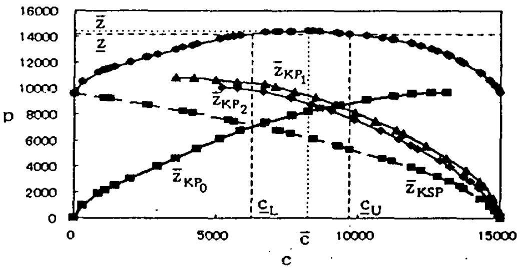

図 1: 上下界値

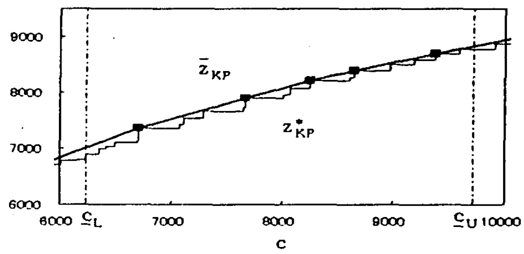

図 2: 関数 z^*_{KP}

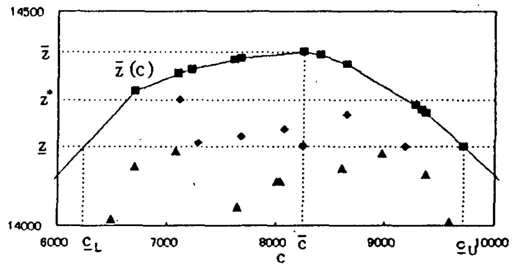

図 3: 最適値の探索

5 結び

数値実験等の詳細については，紙数の関係上当日報告させて頂く．

参考文献

[1] 二川真由美, ナップサック共有問題に関する研究, 修士論文, 防衛大学校 (1996).