2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

代理制約法における最適代理乗数の決定法について

*関西大学　八木　元彰　YAGI Motoaki
01110244　関西大学　木村　作郎　KIMURA Sakuo
01402374　関西大学　仲川　勇二　NAKAGAWA Yuji

1．はじめに

複数の制約条件式の非線形整数計画問題を解くことは、近年ますます重要になってきている。その反面、品質のよい解を得ることは一般に難しい。そこで本研究では代理制約法を用いる。代理制約法は、F.Gloverによって数理計画法の分野に取り入れられたものであり、代理乗数を用いることで原問題の複数制約条件式を単一条件式とした代理問題に変換する手法である。また、原問題が準凸であるときは、複数の制約条件式に乗ずる代理乗数を適当に決定すれば、代理問題の最適解は原問題の最適解と一致することが示されている[1]。しかし、離散問題を緩和して考えた代理双対問題は代理双対ギャップが存在することが多い。この場合、代理双対問題の最適解は一般に原問題の最適解と一致せず、実行可能解となるとは限らない。このときは、単に原問題の目的関数の上限値を与えるだけである。本研究では、代理双対ギャップを最小にする意味で最適な代理乗数を決定するアルゴリズムを提案し、計算機実験によりその特性を調べる。

2．問題

多次元非線形整数計画問題はつぎのように定式化される。

$$
[\mathrm{P}] \qquad \max \ f(\mathbb{x}) \quad \text{subject to} \ g(\mathbb{x}) \le \mathbb{b}, \quad \mathbb{x} \in X \subseteq R^N,
$$

ここで$\mathbb{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^T$はN次元整数値変数ベクトル、$f(x)$は整数値目的関数、$g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_M(x))^T$はM次元整数値ベクトル制約関数、$b=(b_1,b_2,\cdots,b_M)^T$はM次元整数値ベクトル制約許容量である。この原問題[P]を代理乗数uを用いてつぎの代理問題に変換する。

$$
[P^S(u)] \qquad \max \ f(x) \quad \text{subject to} \ \varphi(u,x) \le b, \qquad x \in X
$$

ただし、

$$
\varphi(u,x) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{g_m(x) - g_M(x)\} + g_M(x),
$$

$$
b = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{g_m(x) - g_M(x)\} + g_M(x),
$$

$$
u = (u_1, u_2, \cdots, u_{M-1})^T \in U,
$$

$$U=\{u \mid \sum_{m=1}^{M-1} u_m \le 1, u>0\} \subseteq R^{M-1}$$

である。さらに原問題[P]の代理双対問題$[P^{SD}]$は以下の通りになる。

$[P^{SD}]$ $\quad \min\{opt[P^S(u)]: \quad u \in U\}$

ただし、$opt[P^S(u)]$は代理問題$opt[P^S(u)]$の最適解における目的関数値である。

3．最適な代理乗数を決定するアルゴリズム

最適な代理乗数を決定する手法として、Dyer アルゴリズム[2],COP アルゴリズム[3]などが提案されている。本研究では、Dyer アルゴリズムを取り上げ、さらにそのアルゴリズムの改良を提案する。

3.1 Dyer アルゴリズム

多面体U^1から出発する。第 k 番目の多面体U^k において内接する半径が最大になる円の中心を求め、代理乗数u^kとする。[2] この代理乗数を用いた代理問題を解くと同時に切断面を得る。その切断面により狭められた新しい多面体ができる。以上の操作を多面体が十分に小さくなるまで繰り返す。なお、狭められた多面体の第 j 番目の内接円の半径をd_jとし、その最大値をr^{k+1}とする。

$$r^{k+1}=\max\{y \mid d_j(u^k) \ge y \quad (j=1,\cdots,k)\},$$

$$\sum_{m=1}^{M} u_m^k = 1, \qquad u_m^k \ge 0, \quad (m=1,2,\cdots,M)$$

3.2 Dyer アルゴリズムの改良

Dyer アルゴリズムでは、原問題の制約条件数が増加すると代理乗数を求める過程において計算速度とメモリ速度の低下が生じる。これは、制約条件の個数が増えるにつれて、解くべき問題のサイズが大きくなるためである。そこで、Dyer アルゴリズムの改良を行い、計算速度とメモリ速度の改善をする。その改良法は、その代理乗数を決定する過程において、内接する円の半径の大きさに全く関係していない切断面、及び関係しているがその割合が小さい切断面を削除する。

4．計算機実験

擬似乱数を用いて生成したテスト問題により計算機実験を行った。計算結果及び考察は研究発表会当日に行う。

参考文献

[1]D.G.Luenberg,"Quasi-convex programming",SIAM J.of Appl.Math., 16,pp.1090-1095,1968.

[2]M.E.Dyer,"Calcurating surrogate constraints",Math.Program.,19,pp. 255-278,1980.

[3]仲川　勇二,疋田　光伯,鎌田　弘, "代理双対問題を解くためのアルゴリズム",信学論(A),Vol.J67-A,No.1,pp.53-59 ,Jan.1984.

[4]並川　哲郎,岩崎　彰典,太田垣　博一, 仲川　勇二,"代理制約法における最適代理乗数の決定法",日本オペレーションズリサーチ学会研究発表会アブストラクト集,2001.