2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

フィードバックのある離散資源配分問題

01007584　大阪工業大学　一森 哲男　ICHIMORI Tetsuo

1 はじめに

ここでは最も基本的な単純資源配分問題にフィードバックを考慮した問題を扱う．例として，地雷撤去作業を考えてみると理解しやすい．地雷の埋まった土地を探索し，地雷を発見する．このとき，探索者は発見した地雷を放置することはありえない．探索者は地雷の探索を中止し，これの撤去作業に移る．地雷を見つければ見つけるほど，撤去作業に労力が奪われ探索する労力が減少する．このような例は枚挙にいとまがない．

資源が離散値に限定さた，フィードバックのある資源配分問題はNP困難であることを述べ，動的計画法による解法を与た．活動が10個の数値例を解いてみた．

2 問題の性質と解法

これの定式化を与える．

$$
\begin{aligned}
&\text{(IFB)}\\
&\max \quad \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\\
&\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \left\{ x_j + c_j f_j(x_j) \right\} \le Q,\\
&\qquad\quad x_j \ge 0,\ \text{整数} \quad (j = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

ここで，定数 Q は任意の正の整数とする．$f_j(x_j)$ は増加と仮定する．

まず，この問題がNP困難であることを示す．任意の正の整数 a_j, d_j に対し，フィードバック係数 c_j を

$$1 + c_j a_j = d_j \quad \text{すなわち} \quad c_j = \frac{d_j - 1}{a_j} \qquad (1)$$

となるように設定する．さらに $f_j(x_j) = a_j x_j$ と設定する．すると，(IFB) のスペシャルケースが，つぎの整数ナップサック問題

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\\
&\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \le Q \quad x_j = 0, 1, \ldots
\end{aligned}
$$

となる．ここで，もし，上記の (IFB) を多項式時間で解くアルゴリズムがあれば，このアルゴリズムの与える最適解は整数ナップサック問題の最適解を与える．つまり，このアルゴリズムは整数ナップサック問題を多項式時間で解くことになる．上記で述べたように，整数ナップサック問題の定数（整数）a_j, d_j, Q は任意に設定できるので，任意の整数ナップサック問題を多項式時間で解くことになる．しかしながら，よく知られているように，整数ナップサック問題はNP困難であるので，もし，このことが真実であれば，すべてのNP困難問題を多項式時間で解くことになる．以上のことから，(IFB) はNP困難となる．

つぎに，この問題を動的計画法を用いて解くことを考える．ただし，各 j に対し，関数値 $f_j(x_j)$ は整数値をとるものとし，フィードバック係数 c_j も整数とする．以下，表記を簡単化するため整数条件 $x_j = 0, 1, \ldots \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$ は略し，関数 $g_j(x_j) = x_j + c_j f_j(x_j)$ を定義する．

動的計画法のための漸化式を導くため，記号 $F_k(y)$ を定義する：

$$F_k(y) = \max \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j) \quad \text{s.t.} \sum_{j=1}^{k} g_j(x_j) \le y. \qquad (2)$$

これは資源量の上限を整数値 $y \in \{0, 1, \ldots, Q\}$ に設定し，活動を $1, 2, \ldots, k$ に制限した場合

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$(k \in \{1,2,\ldots,n\})$ の効用の総和の最大値である．だから，$F_n(Q)$ が問題 (IFB) の最適目的関数値となる．

各 $F_k(y)$ を求める際，変数 x_k に着目して，つまり，$x_k \in \{0,1,\ldots,Q\}$ なので，順に $x_k = 0, x_k = 1, x_k = 2, \ldots$ と $y - g_k(x_k)$ が負となる直前まで調べて行けば，どこかで $F_{k-1}(y - g_k(x_k)) + f_k(x_k)$ の値が最大となり，その最大値が $F_k(y)$ となる．つまり

$$F_k(y) = \max_{x_k \in \{0,\ldots,q_{ky}\}} \{F_{k-1}(y - g_k(x_k)) + f_k(x_k)\} \tag{3}$$

となる．ここで，q_{ky} は $y - g_k(x_k) \geq 0$ を満たす x_k の 最大の整数値である．$f_k(0) \equiv 0$ と仮定しているので q_{ky} は 0 以上の整数である．また，$F_0(y) = 0$ $(y \in \{0,1,\ldots,Q\})$ と定義している．この漸化式より容易に (IFB) の最適解が得られる．

3 数値例

$n = 10$ 個の活動をもつフィードバックのある資源配分問題を考える．与えられた資源の上限は $Q = 10{,}000$ とする．各活動のパラメータ m_j, s_j, c_j を表 1 に示す．

表 1． m_j, s_j, c_j の値．

j	m_j	s_j	c_j
1	30.0	5.5×10^{-4}	77.0
2	30.0	5.0×10^{-4}	80.0
3	30.0	4.5×10^{-4}	83.0
4	22.0	5.5×10^{-4}	77.0
5	22.0	5.3×10^{-4}	79.0
6	22.0	4.7×10^{-4}	81.0
7	22.0	4.5×10^{-4}	83.0
8	16.0	5.5×10^{-4}	77.0
9	16.0	5.0×10^{-4}	80.0
10	16.0	4.5×10^{-4}	83.0

ここでは j 番目の活動の効用をあらわす関数として

$$f_j(x_j) = \left\lfloor m_j \left(1 - \exp(-s_j x_j)\right) \right\rfloor \tag{4}$$

を採用してみる．ここで，定数 m_j と s_j は表 1 の数値とする．$\lfloor x \rfloor$ は x の整数部分をあらわす．計算した結果を表 2 に示す．

表 2. 入力，フィードバック，効用.

活動	入力	フィードバック	効用
j	x_j	$c_j f_j(x_j)$	$f_j(x_j)$
1	1,386	1,232	16
2	1,387	1,200	15
3	1,016	913	11
4	697	539	7
5	601	474	6
6	312	243	3
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0	0	0
total	5,399	4,601	58

4 あとがき

新しいタイプの離散資源配分問題を提案し，NP 困難な問題となることを示した．この結論は目的関数の各成分の関数が狭義の凹関数であっても成立する．動的計画法による簡単な解法を示したが，大規模な問題に対しては解法の効率が危惧される．実際，われわれの解いた例題では，資源の総量は $Q = 10{,}000$ と，ある程度の大きさであるが，活動はたった $n = 10$ 個しかない．この問題を解くのに CPU 時間が 51 秒 91 もかかっている．この数値はノートパソコン（Pentium III, 750MHz, 254MB）での実行であるし，プログラムも簡単に作られたものであるため，改良の余地は十分あるものの，大規模な問題に対しては今後の課題として新たな解法が必要と思われる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．