

多期間ポートフォリオ最適化問題のための数理計画モデル

01505910 慶應義塾大学 * 枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

複数の投資対象の中から投資家にとって最も好ましいように、どの投資対象にどれだけ投資をしたらよいかという問題をポートフォリオ最適化問題という。ポートフォリオ最適化問題を解くためのモデルとしては、モデル構築や解法上の容易さから、運用期間にかかわらず、平均・分散モデルを代表とする1期間モデルが用いられることが多い。しかし、年金基金などの長期的な資産運用を行う投資家にとって、多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を「明示的に」モデル化するためには、1期間モデルではなく、多期間モデルを構築する必要がある。実際に多期間確率計画問題を解くためのモデルとして、中心となって発展しているのはシナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルである。近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になり、様々な研究が行われている(Ziembka and Mulvey[12])。一方、シナリオ・ツリーに比べて不確実性をより詳細に記述することが可能なモデルとして、モンテカルロ・シミュレーションをベースとしたシミュレーション型モデル(枇々木[1])、シミュレーション/ツリー混合型モデル(枇々木[2])が提案されている。本研究では、この2種類の数理計画モデルに関する現在までの研究成果を中心に説明する。

2 混合型モデル

2.1 モデルの概要

混合型モデルはシミュレーション経路をツリー構造でいくつかのグループに分けていき、そのグループに属する経路では同一の投資決定に従わせるモデルである。

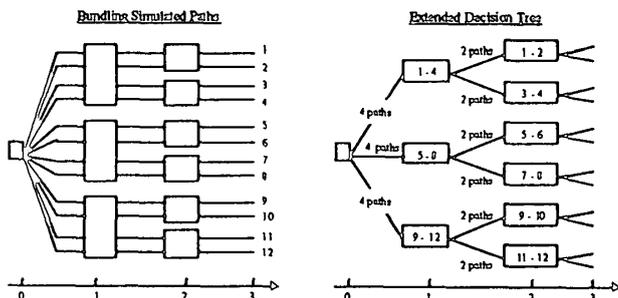


図1: シミュレーション経路と拡張決定ツリー

2.2 資産配分問題の定式化

n 個の危険資産 ($j = 1, \dots, n$) と現金 ($j = 0$) に資金を配分する問題を考える。0時点を投資開始時点、 T 時点を計画最終時点とする。計画最終時点での富(最終富)の期待値をリターン尺度、最終富の目標富に対する不足分(1次の下方部分積率)をリスク尺度とする最適化モデルを記述する。

(1) 集合および添字

- i : 経路(パス)を表す添字。
- s : 決定ノードを表す添字。
- s' : s につながる1時点前のノードを表す添字。
- V_t^s : t 時点の決定ノード s に含まれる経路の集合。
- S_t : t 時点の決定ノード s の集合。

(2) パラメータ

- ρ_{j0} : 0 時点の危険資産 j の価格。
- $\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点の経路 i の危険資産 j の価格。
- r_0 : 期間 1 (0 時点) の金利。
- $r_{t-1}^{(i)}$: 期間 t ($t-1$ 時点) の経路 i の金利。
- W_0 : 0 時点での初期富。
- W_G : 計画最終時点での目標富。
- W_E : 計画最終時点での投資家が要求する期待富。
- I : 経路の本数(シミュレーションの回数)。

(3) 決定変数

- z_{j0} : 0 時点の危険資産 j への投資量。
- z_{jt}^s : t 時点の決定ノード s の危険資産 j への投資量のベース。
- v_0 : 0 時点の現金保有額。
- $v_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金保有額。
- $W_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の富。
- $q^{(i)}$: T 時点の経路 i の富の目標富に対する不足分。

(4) 定式化

$$\text{Minimize } \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \tag{1}$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} h^{(i)}(z_{j1}^s) + v_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1+r_0)v_0, \quad (s \in S_1; i \in V_1^s) \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^s) + v_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{j,t-1}^{s'}) + (1+r_{t-1}^{(i)})v_{t-1}^{(i)}, \quad (t=2, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s) \quad (4)$$

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} h^{(i)}(z_{jT}^{s'}) + (1+r_{T-1}^{(i)})v_{T-1}^{(i)}, \quad (s' \in S_{T-1}; i \in V_{T-1}^{s'}) \quad (5)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (6)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i=1, \dots, I) \quad (7)$$

$$z_{j0} \geq 0, \quad (j=1, \dots, n) \quad (8)$$

$$z_{jt}^s \geq 0, \quad (j=1, \dots, n; t=1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (9)$$

$$v_t \geq 0, \quad v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t=1, \dots, T-1; i=1, \dots, I) \quad (10)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i=1, \dots, I) \quad (11)$$

$h^{(i)}(z)$ は投資量(単位)を表す関数である。

3 研究成果および課題

3.1 計算効率に関する研究

大規模な線形計画問題となるため、アルゴリズムおよび定式化の面から計算時間の短縮を目指している。

① 問題の係数行列構造の利用：枇々木, 田辺 [7]

② 定式化の工夫(コンパクト表現)：枇々木 [5]

3.2 様々なタイプの問題への適用

不確実性の記述を柔軟にできるため、様々な問題に適用可能である。①銀行ALM(斎藤, 枇々木 [9]), ②年金ALM(多田羅, 枇々木 [10]), ③公的年金(枇々木, 茶野 [6]), ④家計の金融資産配分問題(吉田, 山田, 枇々木 [11])に対する研究を行った。また、実際に⑤年金ALMシステム(住友生命グループ, 慶應義塾大学など [8])を開発するためにも本モデルは利用されている。

3.3 取引戦略の比較(図2)

投資比率決定戦略は、非凸非線形問題となるため、反復的に近似解を求める。

3.4 多期間確率計画モデルの比較(図3)

4 おわりに

本研究で説明した混合型モデルの考え方は、他の金融工学の研究テーマにも応用できると考えられる。資産配分問題やALMだけでなく、新しいタイプ問題にも取り組むことを今後の課題としたい。

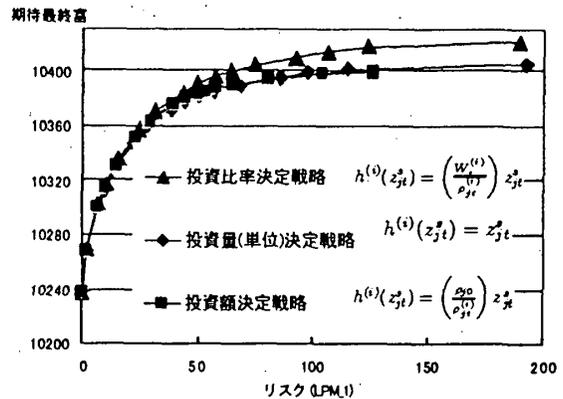


図2：取引戦略の比較

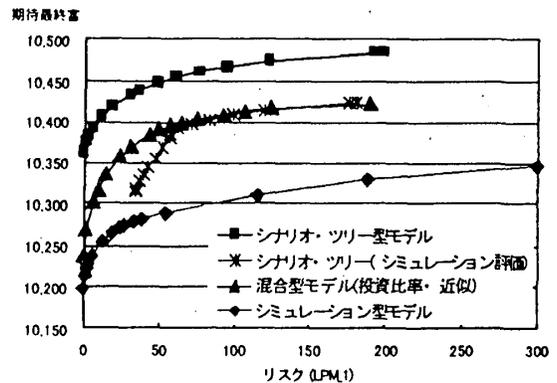


図3：多期間確率計画モデルの比較

参考文献

- [1] 枇々木規雄：戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル。J.O.R.S.J, 44-2(2001), pp.169-193.
- [2] 枇々木規雄：最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル。高橋一編, ジャファイア・ジャーナル [2001] 金融工学の新展開(東洋経済新報社, 2001), pp.89-119.
- [3] 枇々木規雄：金融工学と最適化, 朝倉書店, 2001.
- [4] 枇々木規雄, シミュレーション型多期間確率計画モデルに対する数値実験による考察, 日本金融・証券計量・工学会 2002年夏季大会予稿集, pp.81-100.
- [5] 枇々木規雄：コンパクト表現によるシミュレーション型多期間確率計画モデルの定式化。J.O.R.S.J, 45-4(2002), pp.529-549.
- [6] 枇々木規雄, 茶野努：公的年金への多期間最適化モデルの適用。慶應義塾大学理工学部管理工学科 テクニカルレポート, No. 02-002 (2002).
- [7] 枇々木規雄, 田辺 隆人：多期間ポートフォリオ最適化問題におけるモデリング技術と実装(計算)技術の重要性。ジャファイア・ジャーナル [2003], 掲載予定
- [8] 日経金融新聞, 「住友生命、慶応大学、企業年金の新評価手法、長期の資産管理、柔軟に」, 2002年7月5日.
- [9] 齋藤直紀, 枇々木規雄：市場リスクと信用リスクを考慮した銀行の資産負債管理に対する確率的最適化モデル。JAFEE 2001年夏季大会予稿集, pp.330-349.
- [10] 多田羅智之, 枇々木規雄：多期間確率計画モデルの年金ALMへの適用。JAFEE 2001年夏季大会予稿集, pp.350-366.
- [11] 吉田靖, 山田泰之, 枇々木規雄：家計の金融資産配分問題に対する多期間最適化モデル。慶應義塾大学理工学部管理工学科 テクニカルレポート, No. 02-003 (2002).
- [12] W.T. Ziemba and J.M. Mulvey, Worldwide Asset and Liability Modeling, Cambridge University Press, 1998.