2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

# 資源投入が利得関数の限界効用を逓減させる資源配分ゲーム

防衛大学校　02103560　小牧隆志* KOMAKI Takashi
01504810　宝崎隆祐　HOHZAKI Ryusuke
01000890　飯田耕司　IIDA Koji
01110110　小宮　享　KOMIYA Toru

## 1．はじめに

本報告は，複数のプレイヤーが複数の投資先に資源を投入して，最大限の利益を獲得しようとするゲームを取り扱う．捜索理論の分野ではJ.S.Croucher[1]が，複数の地点に隠された価値を発見しようとする捜索者と，それを阻止しようとする妨害者との２人ゼロ和ゲームを考えた．さらにV.J.Baston and A.Y.Garnaev[2]は，Croucherのモデルに資源投入コストを加味したゲームを考えた．前回の報告[3]では，２人の捜索プレイヤーが目標の捜し合いを行い，両プレイヤーがともに発見した場合は利得を分割するというゲームを考え，指数関数で与えられる利得関数を仮定して議論した．その利得関数は双方の資源投入が互いの利得の限界効用を逓減させるという性質を持っている．今回はそのような性質を持つ利得関数を一般的に取り扱い，非協力ゲームのナッシュ均衡解について論ずる．

## 2．モデルの前提

次のような２人のプレイヤー$A$，$B$が参加する資源配分ゲームを考える．

(1) 資源の投資先の対象の集合を$K=\{1,\cdots,n\}$とする．

(2) $A$，$B$それぞれの所持する資源総量は$X>0$，$Y>0$であり，これを各投資先に任意に分割・投入して利益を得ようとする．$A$の投資先 $i$への投入資源を$x_i \geq 0$とし，$x=(x_1,\cdots,x_n)$を$A$の戦略とする．同様に$B$の投資先 $i$への投入資源を$y_i \geq 0$とし，$y=(y_1,\cdots,y_n)$を$B$の戦略とする．

(3) $A$，$B$が投資先 $i$から得る利得は$x_i$と$y_i$のみに依存し，それぞれ$EA_i(x_i,y_i)$，$EB_i(x_i,y_i)$とする．また，総利得を各投資先から得る利得の総和とし，各プレイヤーに対しそれぞれ$EA(x,y)$，$EB(x,y)$で表す．

(4) $EA_i(x_i,y_i)$，$EB_i(x_i,y_i)$は$x_i \geq 0$，$y_i \geq 0$に対し２階偏微分可能であり，さらに次の性質を持つ．

(i) 自らの資源投入により利得関数の限界効用は逓減する．すなわち，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}EA_i(x_i,y_i)<0,\quad \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}EB_i(x_i,y_i)<0.$$

(ii) 写像$\xi_i$を

$$\omega=\frac{\partial}{\partial x_i}EA_i(x_i,y_i),\ \nu=\frac{\partial}{\partial y_i}EB_i(x_i,y_i),$$

$$\xi_i:(x_i,y_i)\in\{(x_i,y_i)\mid x_i\geq 0,\ y_i\geq 0\}\longrightarrow(\omega,\nu)\in R^2$$

と定義したとき，$\xi_i$のヤコビアンの値は正であるとする．

(iii) $\lim_{x_i\to\infty}\frac{\partial}{\partial x_i}EA_i(x_i,0)<\frac{\partial}{\partial x_i}EA_i(x_i,y_i)$，$\lim_{y_i\to\infty}\frac{\partial}{\partial y_i}EB_i(x_i,y_i)<\frac{\partial}{\partial y_i}EB_i(x_i,y_i)$とする．

(iv) 相手の資源投入により利得関数の限界効用は逓減する．すなわち，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial x_i}EA_i(x_i,y_i)<0,\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_i}EB_i(x_i,y_i)<0.$$

## ３．ナッシュ均衡解

プレイヤー$A$，$B$の利得関数は，$EA(x,y)=\sum_{i=1}^{n}EA_i(x_i,y_i)$，$EB(x,y)=\sum_{i=1}^{n}EB_i(x_i,y_i)$と表される．それぞれ$x$，$y$に関して狭義凹関数であり，実行可能領域がコンパクト凸集合であることから，

$$EA(x^*,y^*)=\max_x\left\{EA(x,y^*)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i\le X,\,x_i\ge 0,\,i=1,\cdots,n\right\} \tag{1}$$

$$EB(x^*,y^*)=\max_y\left\{EB(x^*,y)\mid\sum_{i=1}^{n}y_i\le Y,\,y_i\ge 0,\,i=1,\cdots,n\right\} \tag{2}$$

となるようなナッシュ均衡解 $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$，$y^*=(y_1^*,\cdots,y_n^*)$が存在する．また，その必要十分条件は式(1), (2)に対するKarush-Kuhn-Tucker条件により与えられる．式(1), (2)のK-K-T条件を整理すると次式となる．

$$(\mathrm{I})\begin{cases} i=1,\cdots,n\text{に対し，}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}EA_i(x_i^*,y_i^*)\begin{cases}=\omega & \text{if } x_i^*>0\\ \le\omega & \text{if } x_i^*=0,\end{cases}\\ \dfrac{\partial}{\partial y_i}EB_i(x_i^*,y_i^*)\begin{cases}=\nu & \text{if } y_i^*>0\\ \le\nu & \text{if } y_i^*=0,\end{cases}\\ x_i^*\ge 0,\\ y_i^*\ge 0.\end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases}(\sum_{i=1}^{m}x_i^*-X)\omega=0,\\ (\sum_{i=1}^{m}y_i^*-Y)\nu=0,\\ \sum_{i=1}^{m}x_i^*\le X,\\ \sum_{i=1}^{m}y_i^*\le Y,\\ \omega\ge 0,\\ \nu\ge 0.\end{cases}$$

ただし，$\omega$と$\nu$はKarush-Kuhn-Tucker乗数である．

## ４．解法

ナッシュ均衡解を求めるには次のような解法が考えられる．(Ⅰ)を満たす$x_i^*$，$y_i^*$を$\omega$と$\nu$によって表し，それらを$x_i^*(\omega,\nu)$，$y_i^*(\omega,\nu)$とする．次に$x_i^*(\omega,\nu)$，$y_i^*(\omega,\nu)$を用いることにより，(Ⅱ)を満足するK-K-T乗数$\omega,\nu$を決定する．この段階での解法ではNewton法やその他の方法が応用できる．この解法に関連して次の定理が成り立つ．

定理1 ： $U_i\equiv\{(\omega,\nu)\mid\omega>\lim_{x_i\to\infty}\dfrac{\partial}{\partial x_i}EA_i(x_i,0),\nu>\lim_{y_i\to\infty}\dfrac{\partial}{\partial y_i}EB_i(0,y_i)\}$と定義すると，$x_i^*(\omega,\nu)$，$y_i^*(\omega,\nu)$は任意の$(\omega,\nu)\in U_i$に対し一意に定まる連続関数となる．

## ５．数値例

紙面の都合上，数値例については発表会当日紹介する．

## 参考文献

[1] J.S.Croucher , Application of the Fundamental Theorem of Games to an Example Concerning Antiballistic Missile Defense, *Nav. Res. Logistics Quart.* , Vol.22 (1975), 197-203.
[2] V.J.Baston and A.Y.Garnaev , A Search Game with a Protector , *Nav. Res. Logistics* ,Vol.47 (2000), 85-96.
[3] 2001 年度秋季研究発表会アブストラクト集(2001), 136-137.