2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Apex Gameにおける提携形成の動的分析

02502510　東京工業大学　福田恵美子　FUKUDA Emiko

1　はじめに

協力ゲームにおける解の1つにCS-valueがある．これは，既存の提携構造によって提携形成の順列を制限したときの各プレイヤーの限界貢献度の期待値で与えられ，Owenによって定義されたものである．HartとKurzは，このCS-valueを利得とした戦略形ゲームにおける強均衡ナッシュ均衡を用いて，利得最大化を目指して提携形成がおこなわれる場合どのような提携が形成されるかを分析した．本研究では提携形成の交渉過程を展開形ゲームとして定式化し，その部分ゲーム完全均衡を用いて，安定な提携構造を定義する．その上で，ゲームのクラスをapex gameに絞って安定な提携構造を分析し，Hartらの結果との比較をする．

2　CS-value

CS-valueはOwenによって公理系からの導出が行われている．$N=\{1,2,\dots,n\}$をプレイヤーの集合とし，その分割を$\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\dots,B_m\}$とする．また$v:2^N\to\mathbb{R}$を特性関数とする．ここで，各組$(v,\mathcal{B})$に対して利得ベクトルを与える関数を$\varphi$とする．公理系は以下の通りである．

公理系

C1　Kがvのキャリアであるとき，すなわち任意の$S\subset N$について$v(S)=v(K\cap S)$であるとき

$$\sum_{i\in K}\varphi_i(v;\mathcal{B})=v(K)$$

C2　任意の$B_j\in\mathcal{B}$に対して，$\sum_{i\in B_j}\varphi_i(v;\mathcal{B})=v(B_j)$.

C3　σを提携の添字の集合$M=\{1,\dots,m\}$の任意の置換であるとする．ここで任意の$i\in N$に対して

$$\varphi_i(v;\{B_1,\dots,B_m\})=\varphi_i(v;\{B_{\sigma(1)},\dots,B_{\sigma(m)}\})$$

C4　πを提携構造$B_1,\dots,B_m$を保存したNの任意の置換とする．このとき

$$\varphi_{\pi(i)}(\pi^*v;\mathcal{B})=\varphi_i(v;\mathcal{B})$$

ここで$S=\{i_1,\dots,i_S\}$に対し
$\pi^*v(\{\pi(i_1),\dots,\pi(i_S)\})=v(S)$.

C5　任意の2つのゲームvとw，および任意の分割$\mathcal{B}$に対して

$$\varphi(v+w;\mathcal{B})=\varphi(v;\mathcal{B})+\varphi(w;\mathcal{B})$$

定理　**(Owen)　C1〜C5**を満たす関数が唯一存在し，以下のように与えられる．任意の$B_j\in\mathcal{B}$および$i\in B_j$に対し

$$\varphi_i(v;\mathcal{B}) = \sum_{\substack{H\subseteq M\\ H\not\ni j}}\sum_{\substack{S\subseteq B_j\\ S\not\ni i}}\frac{h!(m-h-1)!s!(b_j-s-1)!}{m!b_j!} \times[v(\Omega\cup S\cup i)-v(\Omega\cup S)]$$

ここでh,sおよびb_jは，それぞれ集合H,SおよびB_jの濃度であり$\Omega=\cup_{k\in H}B_k$.

3　戦略形による定式化

HartとKurzはCS-valueを利得とした同時決定の提携形成モデルとして以下の2つを定義した．

定義　**(γ-model)**　ゲーム$\Gamma(v,N)$はつぎの要素で構成される．

(1)　プレイヤーの集合をNとする．

(2)　各プレイヤー$i\in N$について戦略の集合を$\Sigma^i=\{S\subset N|i\in S\}$とする．

(3)　戦略の組$\sigma=(S^1,S^2,\dots,S^n)\in\Sigma^1\times\Sigma^2\times\cdots\times\Sigma^n$および各$i\in N$に対して，利得を$\varphi_i(v,\mathcal{B}_\sigma^{(\gamma)})$とする．ここで

$$T_\sigma^i=\begin{cases} S^i & S^j=S^i \quad \forall j\in S^i \\ \{i\} & \text{otherwise}\end{cases}$$

としたとき，$\mathcal{B}_\sigma^{(\gamma)}=\{T_\sigma^i|i\in N\}$.

定義 **(δ-model)** ゲーム $\Delta(v, N)$ は (1), (2) とつぎの (4) によって与えられる.

(4) 戦略の組 $\sigma = (S^1, S^2, \ldots, S^n) \in \Sigma^1 \times \Sigma^2 \times \cdots \times \Sigma^n$ および各 $i \in N$ に対して, 利得を $\varphi_i(v, \mathcal{B}_\sigma^{(\delta)})$ とする. ここで

$$\mathcal{B}_\sigma^{(\delta)} = \{T \subset N | i, j \in T \iff S^i = S^j\}.$$

定義 提携構造 $\mathcal{B}$ が γ-安定 (δ-安定) であるとは, $\sigma_{\mathcal{B}}$ が戦略形ゲーム $\Gamma(v, N)$ ($\Delta(v, N)$) の強均衡であることをいう. すなわち任意の $i \in T$ について $\varphi_i(v, \hat{\mathcal{B}}) > \varphi_i(v, \mathcal{B})$ が成り立つような非空の提携 T および $\hat{\sigma}$ が存在しない. ここで $\hat{\mathcal{B}}$ は (3) により $((\hat{\sigma}^i)_{i \in T}, (\sigma_{\mathcal{B}}^j)_{j \in N \setminus T})$ に対応する.

4 展開形ゲームでの定式化

Hart らは提携形成を戦略形ゲームで表現した. それに対して, 本研究では提携形成過程を交渉として捉え, 展開型ゲームによる定式化をおこなった.

定義 **(Dynamic model)** 提携形成の交渉ゲーム $\Lambda(v, N) = \langle N, H, P, (u_i)_{i \in N}, c \rangle$ は以下のように構成される.

- プレイヤーの集合を N とする.
- 履歴の集合を H とし, このうち結果を与える履歴の集合を Z とする.
- 履歴 h において提案されている提携があれば, それを $T(h)$ とし, なければ $T(h) = \phi$ とする.
- プレイヤー関数 $P : H \setminus Z \to N$ は, $T(h) = \phi$ のとき $N \setminus K(h)$, また $T(h) \neq \phi$ のとき $T(h)$ の中からランダムにプレイヤーを 1 人指定する. このとき $K(h)$ は履歴 h において既に形成された提携の和集合である.
- $P(h) = i$ の戦略は
$$\begin{cases} \sigma_i(h) \in \{T \subset N \setminus K(h) | i \in T\} & T(h) = \phi \\ \sigma_i(h) \in \{\text{賛成, 反対}\} & T(h) \neq \phi \end{cases}$$
- 戦略の組 $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ および $i \in N$ に対するゲームの利得を
$$u_i(\sigma) = \delta^{t(\sigma)} \varphi_i(v, \mathcal{B}(\sigma)) - c_i(\sigma)$$
で与える. ここで, δ は割り引き因子, $\mathcal{B}(\sigma)$ は σ において実現される提携構造, そして c は履歴に対して各プレイヤーの負うコストを表わすベクトル値関数とする.

定義 提携構造 $\mathcal{B}$ が動的に安定であるとは, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\sigma)$ なる σ がゲーム $\Lambda(v, N)$ の部分ゲーム完全均衡であることをいう.

5 Apex Gameでの提携形成

apex game とは, 1 人のメジャープレイヤーと $n-1$ 人のマイナープレイヤーにより構成される重み付き多数決ゲームの一種である. プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ のうち 1 をメジャープレイヤーとすると, 特性関数は以下のように表せる.

$$v(S) = \begin{cases} 1 & 1 \in S \text{ and } S \setminus \{1\} \neq \phi, \text{ or } S = N \setminus \{1\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hart らは, この apex game における安定な提携構造の分析をし, つぎの結果を得た.

命題 **(Hart/Kurz)** v を n 人 apex game とする. $n \geq 5$ のとき, $[1|23\ldots n]$ が唯一の γ-安定な提携構造となり, δ-安定な提携構造は存在しない. また $n = 4$ のとき, $[1|234]$ が γ-安定であるが δ-安定ではなく, $[12|3|4]$, $[13|2|4]$ と $[14|2|3]$ が γ-安定かつ δ-安定な提携構造になる.

本研究では, このゲームにおける動的に安定な提携構造を分析し, 以下の結果を得た.

定理 v を n 人 apex game とする. メジャープレイヤーが最初の発言者のとき, $[1j|k|\ldots|n]$ のみが動的に安定な提携構造となる. またマイナープレイヤーが最初の発言者のとき, $[1j|k|\ldots|n]$ のほかに $[1|2\ldots n]$ も動的に安定な提携構造になる.

6 おわりに

動的な提携形成モデルを構築することによって, 交渉の進めかたを考慮に入れた分析ができ, 静的なモデルでは得られなかった結果が得られた. 今後の課題としては, 連立政権形成など実際の事例への適用を考えている.