

確率的DEAによる技術変化と効率性の評価に関する研究

02502394 神戸大学 林 崇文* Takafumi HAYASHI
01604524 大阪大学 森田 浩 Hiroshi MORITA
01501824 神戸大学 藤井 進 Susumu FUJII

1 はじめに

産業界などで企業の業績をはかるものとして効率性がある。この効率性を測る方法には、数理計画アプローチとして包絡分析法 (Data Envelopment Analysis; DEA), そして計量経済アプローチとして決定論的フロンティア法や確率的フロンティア法 (Stochastic Frontier; SF)[3] がある。DEA は入出力の間に特定の関数を想定しないノンパラメトリックな方法で、企業や公共団体などの効率性分析に広く適用されている。一方、決定論的フロンティア法や確率的フロンティア法では入出力の間に特定の関数を想定し、そのパラメータを推定するパラメトリックな方法で、産業界全体を対象とした効率性評価に広く適用されている。

前回、DEA 法と確率的フロンティア法それぞれを用いて時系列評価のひとつである技術変化を測定し、その特性について解析した [4]。その結果、DEA の方が確率的フロンティア法に比べてノイズに対するロバスト性があるのではないかと考えられた。しかし、ノイズが小さいときにはパラメトリックモデルとの整合性が十分であると思われるが、確率的フロンティア法の方が良い結果を示していた。そこで今回は、その DEA による測定の精度をさらに向上させるため、ノイズのような不確実性を考慮した DEA (確率的 DEA) を定式化し、効率性や技術変化を評価することを考えた。

2 技術変化について

DEA における評価は主として一時点における事業体、生産者の効率性評価である。時系列的にデータのある場合には、DEA ではウィンドー分析がある [5]。これは隣接する 2 期間をデータをまとめて効率性の評価をすることにより、効率性の時系列的な変化を観察することができるものである。しかし、このウィンドー分析は、効率性の時系列的变化をみることしかできない。効率性だけでなく生産性や技術変化をみるための指標に Malmquist 指数 [3] というものがある。これは 2 期間の時系列的データにおける優越関係を表す指標である。Cave らはこの Malmquist 指数を生産性に適用することで、2 期間の事業体の生産性の優越関係をみること考えた [2]。ここで、技術変化とは効率的フロンティアの変

化のことで、生産性とは効率性とフロンティアの両方が関わる変化と考えられる。

本研究では、Malmquist 指数を用いて生産性変化を調べたときに得られる技術変化率の値を用いる。Malmquist 指数は、時刻 t の入出力データと時刻 t の効率的フロンティアとの距離関数を $D_o^t(x^t, y^t)$ とすると、次のように表される。

$$M_o(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^t(x^t, y^t)} \times \left[\frac{D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{D_o^t(x^t, y^t)}{D_o^{t+1}(x^t, y^t)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

このように Malmquist 指数は 2 つの項に分解され、1 つめの項が効率性変化を、2 つめの項が技術変化を表し手いる。Malmquist 指数はこの 2 つを考慮した生産性変化をみることができる。

3 確率的 DEA とその解法

本来 DEA は確定的なデータを扱う方法であり、データそのものが実際に不確実な要素を持っていたとしても平均値などの代表値を用いたりすることでデータを確定させてから効率性評価をしなければならぬ。そこで不確実性をもつデータを DEA を用いて効率性評価をするために確率的計画法をとりいれることを考える。確率的計画法には大きく分けて機会制約条件モデルと二段階モデルが存在する。機会制約条件モデルは確率変数が制約条件の中に含まれるとき、その条件が成立しない場合の確率に着目した方法である。一方、二段階モデルは制約条件が成立しない場合、制約からの逸脱量に着目しそれに対するペナルティーを付加する方法である。本研究ではこの二段階モデルを一般化してリコースをもつ確率的計画問題 (以下リコース問題) を DEA に組み込むことによって不確実性をもつデータの効率性や技術変化を評価することを考えた。

確率的 DEA は、従来の確定したデータで評価していた DEA モデルに確率的計画法を取り入れることで不確実性を持つデータからでも効率性評価ができるようにする方法である。このばらつきを考慮に入れるためには、制約条件からの逸脱量についてモデル化されたリコース問題を DEA に組み込む必要がある。そこで DEA の基本モデルである CCR モデルにリコース問題の定式化を取り入れる。このとき不確実性を持つ入出力データを繰返し測定

により観測するが、この繰返し測定によるデータは離散型の確率変数とみなすことができ、L型法 [1] を用いることで効率的に解を導くことができる。L型法は1969年に Van Slyke and Wets により開発された解法で、目的関数に含まれる非線形の部分(リコース関数)を線形近似することで解を導出する。以下に DEA に確率的計画法をとりいれたモデルの定式化を示す。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \theta - \epsilon \left(\sum_{i=1}^m s_{xi} + \sum_{r=1}^t s_{yr} \right) \quad (2) \\ & + wE \left[\sum_{k=1}^K (\min r_{xk} + r_{yk}) \right] \\ \text{subject to} \quad & r_{xk} = -x_{iok}\theta + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ijk} + s_{xi} \\ & r_{yk} = y_{rok} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rjk} + s_{yr} \\ & \theta \geq 0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \\ & s_{x1}, \dots, s_{xm} \geq 0, \quad s_{y1}, \dots, s_{yt} \geq 0 \end{aligned}$$

このリコースモデルの優れたところは、繰返し測定という状況から確率的なデータが複数得られた場合に全てのデータが定式化に用いられた上、L型法により求解できることである。(2)式の目的関数の $wE \left[\sum_{k=1}^K (\min r_{xk} + r_{yk}) \right]$ を新たな変数 q と置き換えて線形計画法に変換し、線形制約を順次加えていくことにより最適解を導き出している。

この解法を用いてばらつきを考慮した効率値を求めることができる。本研究では、2入力1出力システムの時系列的データの技術変化を確率的 DEA と従来の DEA の2つの方法で測定し、それぞれの測定値について考察をする。時間 t から時間 $t+1$ の事業体 o の技術変化 $TECH_o(t, t+1)$ は Malmquist 指数 (1) を用いて測定され、時間 1 から T までの事業体 o の技術変化は、それらの積として

$$\prod_{t=1}^{T-1} TECH_o(t, t+1)$$

により求められる。こうして得られる事業体 o の技術変化をシステム全体で平均をとり、1期間あたりに直して技術変化率の測定値とする。

4 解析結果

前回の報告 [4] と同様に、技術変化を評価するデータとして Cobb-Douglas 型生産関数を用いて技術変化率が2%であるようなデータを作成することとし、いろいろなノイズの大きさに対して3回の繰返し測定によるデータセットを作成した。測定結果とし

ては2%に近いほど望ましい結果ということができる。従来の DEA 法では繰返し測定によって生じる変動を取り込むことができないので、技術変化率を3回のデータに対してそれぞれ測定してその平均値をとるか、3回のデータの平均値を代表値として技術変化率を測定するかの何れかとなる。いずれの方法でもばらつきの大きさは考慮されていない。確率的 DEA 法を用いるときは、3回のデータ全てを用いて効率値を求め、技術変化率を測定することができる。

以上を10通りのデータセットに対して実行し、推定された技術変化率の精度を表す SN 比を計算した。この SN 比は

$$SN = -10 \log \left((m-2)^2 + V \right)$$

により得られる指標であり、この値が大きいほど測定値の信頼性は高いといえる。その結果、データにばらつきのある場合には、確率的 DEA 法の方が従来の DEA 法よりよい推定結果を示すことがわかった。

5 おわりに

DEA に確率的計画法を適用し、データにばらつきがあるときの技術変化の評価をすることができた。ノイズの大きさによる違いや確率的フロンティア法との対比などさらなる解析を行っている。

参考文献

- [1] J. Birge and F. Louveaux. Introduction to Stochastic Programming Springer, 1997.
- [2] D. W. Caves, L. R. Christensen and W. E. Diewert. The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity. Econometrica, vol. 50, pp. 1393-1414, 1982.
- [3] T. Coelli, D. S. Prasada Rao and G. E. Battese. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [4] 林 崇文, 森田 浩, 藤井 進, 中山 徳良. 確率的フロンティア法と包絡分析法による技術変化の評価とその比較2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp. 140-141, 2000.
- [5] 刀根 薫. 経営効率性の測定と改善 -包絡分析法 DEA による. 日科技連, 1993.