2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

多目的離散最適化法を用いた投資信託最適組み合わせ問題

02103744　関西大学 *柿田　千里　　KAKITA Chisato
02004784　関西大学　伊佐田　百合子　ISADA Yuriko
01402374　関西大学　仲川　勇二　　NAKAGAWA Yuji

1. はじめに

多目的最適化問題は，経済学，経営学，社会学，工学などあらゆる分野において存在している．そこで，実世界に存在する問題を解くことができる解法は非常に重要である．

しかし，変数が離散値である多目的最適化問題は，微分可能な関数に定式化し，変数を連続値として扱って解くか，解を数えあげる列挙法的アプローチで解くしかない．

本研究では，仲川ら[1]によって提案された大規模な多目的離散最適化問題を扱える手法を用い，実世界に存在する問題の応用例として，投資信託最適組み合わせ問題を考える．また，前回からの改良点として，目的関数に，ポートフォリオの最適化において大変重要な役割を担っている平均分散モデル（H. Markowitz, 1952）[2]を導入している．

2. 多目的離散最適化問題

一般に，決定すべき空間が離散的であるような最適化問題を，離散最適化問題と言う．このような離散最適化問題は次のように定式化される．

［P1］：
$$Max\ \ f(x)=\{f_1(x),\dots,f_m(x)\}$$
$$s.t.\ \ \mathrm{g}(x)\le \mathrm{b}$$
$$x_i\in K_i\,(i=1,\dots,n)$$

ここで，$x=(x_1,\dots,x_n)$，$K_i=\{1,2,\dots,k_i\}$，K_i は決定すべき項目集合であり，b は制約関数 $\mathrm{g}(x)$ に対する最大の制約量である．ここで，制約関数は単一とする．

多目的離散最適化問題では，それぞれの目的関数に競合性があるため，複数の目的関数を同時に最適化するような解は存在しない．かつ，最適解はたった一つではなく，パレート最適解として存在する．

多目的最適化問題においての目標は，このパレート最適解を探索することにある．そして，このパレート最適解の中から意思決定者の価値観に合った，単一解または適当な大きさの解集合を求めることが，実用上の問題となる．

2-1. 手法

まず，代理目的乗数 w を導入し，複数の目的関数を単一の目的関数に変換した後，任意に与えた標的値（目的関数の値）よりよい値となる解を列挙する．このような問題を単一標的問題と呼ぶ．

単一標的問題は次のように定式化される．

［P2］：
$$Target\ \ wf(x)\ge f^{ST}$$
$$s.t.\ \ \mathrm{g}(x)\le \mathrm{b}$$
$$（但し，\sum_{i=1}^{m}w_i=1, w_i\ge 0）$$

この問題はモジュラ法[3]を用いて解かれている．

現在，モジュラ法を用いることによって，1000変数規模の非線形ナップサック問題を実用的な時間で解き得ることが報告されている[4].

また，この問題の非劣解の集合は，原問題[P1]の非劣解の集合と一致する.

3. 投資信託最適組み合わせ問題

投資信託では，何百ものファンドが存在する．そこで，大規模な問題が扱える先ほどの手法を用いて，適用例として，投資信託最適組み合わせ問題を検討する.

現在，わが国の追加型株式投信で設定後一年以上経過した全ファンド数だけでも，1,396 本ある（但し，ブル・ベア型のファンド、財形株投型、ミリオン型、限定追加型など特殊な運用型ファンドは除く)。

投資信託とは，複数の投資家の資金を集め，これをファンドとして証券運用の専門機関が主に証券に分散投資し，投資家の所有数に応じてその利益を分配する仕組みであり，プロによる専門的な運用能力を活用して様々な投資対象に分散投資を行い，投資家に簡便で高パフォーマンスかつ低リスクの投資手段を提供するものである.

今回は，その投資者（意思決定者）の満足度を満たすようなファンドの組み合わせのパレート最適解集合を列挙する.

その基準として，今回は，すべての投資信託の評価会社の評価と，平均分散モデルを用いた期待収益率と共分散を目的関数として用いる.

この問題は次のように定式化される.

[P3] ：

$$Max \quad f_1(x)=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} s_i(x_i)\cdot c_i(x_i)$$

$$f_2(x)=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)\cdot c_i(x_i)$$

$$f_3(x)=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} k_i(x_i)\cdot c_i(x_i)$$

$$f_4(x)=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i)\cdot c_i(x_i)$$

$$f_5(x)=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)\cdot c_i(x_i)$$

$$f_6(x)=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(x_{ij})\cdot c_i(x_i)\cdot c_j(x_j)$$

$$s.t. \qquad g(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)\le b$$

ここで，$s_i(x_i)$，$p_i(x_i)$，$k_i(x_i)$，$d_i(x_i)$はそれぞれの評価会社の評価値，$c_i(x_i)$はそのファンドの基準価額，収益率を$r_i(x_i)$，共分散をσ_{ij}，$i=\{1,2,\dots,n\}$．$j=\{1,2,\dots,n\}$，$x_i\in\{1,2,\dots,k_i\}$ とする.

そして，今回改良付加した結果においても，パレート最適解集合を抽出することができた.

---

[1] 仲川勇二，疋田光伯：“多目的離散最適化問ための今野浩，“理財工学 1”，日科技連出版社，1995 対話型意思決定アルゴリズム”，日本経営工学会論文誌,Vol. 51, No. 3, pp. 197-202(2000)

[2] 今野浩，“理財工学 1”，日科技連出版社，1995

[3] 仲川勇二：“離散最適化問題のための新解法”，電子情報通信学会論文誌,Vol. J73-A, No. 3, pp. 550-556(1990)

[4] Y. Nakagawa and A. Iwasaki” Modular Approach for Solving Nonlinear Knapsack Problems” , IEICE Trans. Fundamentals E82-A (9), pp. 1860-1864(1999)