2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

多目的ナップサック問題を解くための標的アプローチ

02004784 関西大学 *伊佐田百合子 ISADA Yuriko
01402374 関西大学 仲川勇二 NAKAGAWA Yuji

1. はじめに

多目的ナップサック問題を解くために動的計画法や分枝限定法をもとにしたアルゴリズムが開発されてきた[1]. しかしこれらの多くは，線形なナップサック問題を扱うものであった.

本論文は，非線形ナップサック型問題を解くために提案されているアルゴリズム（標的アプローチ）を適用して，多目的非線形ナップサック問題が効率的に解き得ることを示す. 標的アプローチは，仲川によって開発されたモジュラ法[2]によってアルゴリズムが設計されており，非線形ナップサック問題の標的値より良いすべての解を制約条件のもとに列挙して解を求める手法である．標的値より良いすべての解を列挙する問題を標的問題と呼び，そこで得られた解を標的解と呼ぶ．次に，単一制約単一目的の最も簡単な標的問題を示す.

$[\mathrm{P^O}(f^T, b^O)]$: Enumerate all solutions hitting

$$\text{target}\quad f^O(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^O(x_i) \geq f^T$$

$$\text{s.t.}\quad g^O(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i^O(x_i) \leq b^O$$

$$x_i \in K_i^O \ \text{for}\ i \in N.$$

ここで，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，$K_i^O = \{1, 2, \ldots, k_i^O\}$，$N = \{1, 2, \ldots, n\}$，$f^T$ は標的値である.

2. 一次元多目的ナップサック問題

2.1. 代理目的問題

一次元多目的非線形ナップサック問題は次のように定式化される.

$$(\mathrm{P}^{10}):\ \text{Max}\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ \ldots,\ f_m(\mathbf{x}))$$

$$\text{s.t.}\quad g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \leq b,$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{K}.$$

ここで，$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ \ldots,\ f_m(\mathbf{x}))$ は目的関数，$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ は制約関数，$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ は変数，$\mathbf{K} = \{\mathbf{x} : x_i \in k_i,\ for\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ は，項目案集合である.

問題 P^{10} に代理目的乗数を導入し，複数の目的関数を単一目的関数に変換した問題を考える．この問題を代理目的問題と呼ぶ．代理目的問題は次式で表すことができる.

$$(\mathrm{P}^{11}):\quad \text{Max}\quad \mathbf{wf}(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t.}\quad g(\mathbf{x}) \leq b,$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{K}.$$

$$\text{但し}\quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1,\ w_j \geq 0.$$

ここで，$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ は代理目的乗数である. 代理目的問題の最適解は，問題 P^{10} のパレート最適解であることが知られている.

2.2. 標的アプローチの適用

代理目的問題 P^{11} に標的アプローチを適用した問題は，次式で表すことができる.

$$(\mathrm{P}^{12}):\quad \text{Target}\quad \mathbf{wf}(\mathbf{x}) \geq f^{ST}$$

$$\text{s.t.}\quad g(\mathbf{x}) \leq b,$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{K}.$$

ここで，f^{ST} は代理目的問題の標的値である．この問題は，単一制約単一目的の標的問題になっている．標的問題を解いて得られる解に対して問題 P^{10} の目的関数で優越性テストを行った結果得られる解集合は，問題 P^{10} のパレート最適解であることが保証されている[3]．多目的ナップサック問題では，得られたパレート最適解の中から意思決定者が自らの価値観にあった解を選択する．こうして得られた解は，選考最適解と呼ばれる．意思決定者が解を選択する際に，すべてのパレート最適解が列挙されている必要はない．適切な個数の意思決定者の価値観を反映した解が，解の候補として列挙されていればよい．多目的ナップサック問題に標的アプローチを適用することは，多目的ナップサック問題に代理目的乗数を導入し，単一目的の代理目的問題に変換して，標的値より良いすべての解を列挙することである．意思決定者の価値観は代理目的乗数に，解候補の数は標的値により与えられる．意思決定者は，標的アプローチを用いて多目的ナップサック問題を解いて得られたパレート最適解の中から，自らの価値観に合った解を選択すればよい.

3. 計算例

一次元多目的非線形ナップサック問題に標的アプローチを適用した計算例を示す． 表 1は，3 目的で，変数と各変

数に対する項目案数をそれぞれ100, 200, 500と変化させた問題について計算実験を行った結果である．また，2目的100変数100項目，2目的1000変数100項目の場合について代理乗数を変化させて測定した．表2，表3は，その結果を示したものである．テスト問題は，擬似乱数 $1 \le f_{ij}(k+1) - f_{ij}(k) \le 2^8$ を使用して生成した．測定した項目は，解の最大数，処理時間及び最大10個までの解を列挙する際の繰り返し回数である．計算実験には，CPU500MHz, メモリー192MBのDOS/Vコンピュータを使用した．計算結果は，現在まで解くことが困難であった大規模な問題をパーソナルコンピュータにおいて実用的な時間内で解きうることを示している．

表1　3目的100, 200, 500変数で100, 200, 500項目案の場合の計算結果

n×k	10個の解の列挙時		総処理時間(sec)	繰り返し回数
	最大項目数	処理時間(sec)		
100×100	2892	1	8	6
100×200	24680	4	16	5
100×500	8626	7	39	6
200×100	6954	6	39	7
200×200	2127	9	59	6
200×500	969181	78	455	8
500×100	31700	37	178	5
500×200	5438	61	488	8
500×500	235503	132	1184	9

表2　2目的100変数100項目で代理目的乗数を変化させた場合の計算結果

代理目的乗数		10個の解の列挙時		総処理時間(sec)	繰り返し回数
f_1	f_2	最大項目数	処理時間(sec)		
0.1	0.9	10099	1	8	7
0.2	0.8	15456	1	6	6
0.3	0.7	17606	2	15	9
0.4	0.6	9235	1	9	8
0.5	0.5	55488	3	11	6
0.6	0.4	8649	1	9	8
0.7	0.3	1169	1	6	7
0.8	0.2	13377	1	8	7
0.9	0.1	14932	2	8	7

表3　2目的1000変数100項目で代理目的乗数を変化させた場合の計算結果

代理目的乗数		10個の解の列挙時		総処理時間(sec)	繰り返し回数
f_1	f_2	最大項目数	処理時間(sec)		
0.1	0.9	15835	26	203	8
0.2	0.8	24255*	26*	207	8
0.3	0.7	6200	25	100	4
0.4	0.6	22670	28	162	6
0.5	0.5	90854*	31*	228	8
0.6	0.4	72036	37	147	5
0.7	0.3	25088	26	76	3
0.8	0.2	4602*	26*	208	8
0.9	0.1	39005*	28*	188	7

*は最大10個の解を列挙した際に，10個の解は存在せず9個の解が列挙された際の値である

[1] M. Ehrgott, X.Gandibleux:A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization,OR Spektrum 22, pp425-460(2000)
[2] 仲川勇二，"離散最適化問題のための新解法"，電子情報通信学会論文誌，Vol. J73-A, No. 3, pp. 550-556, (1990)
[3] Y.Isada, M.Hikita, Y.Nakagawa: A Method for Solving Multi-objective Discrete Optimization Problem, Proceedings of the first western pacific and third australia-japan workshop on stochastic models in engineering, technology and management, pp.192-201 (1999).