2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

閉集合族のサーキット、コサーキットのパッキング

01402860 東京大学 中村政隆 NAKAMURA Masataka

1 閉集合族とそのサーキット

マトロイドの (ある元を含む) サーキット族、コサーキット族は、互いにブロッカーになり、かつ常にパックする。かつ、もっと強く Menger の定理が成立して、Max Flow Min Cut property を持つ。これに類比して、アンチマトロイドの根を同じとしたサーキット族とパス族もブロッカーになる。ただし、アンチマトロイドでは、この対がパックするとは限らない。

以下で、閉集合族とそのサーキット、コサーキットという概念を導入すると、それがマトロイドのサーキット、コサーキットという概念、およびアンチマトロイドの根付きサーキット、根付きパスという概念を特別な場合として含み、かつこの閉集合族での根付きサーキット族、根付きコサーキット族が互いにブロッカーになるという関係がマトロイド、アンチマトロイドでの前述のブロッカーの関係を特別な場合として含むことが示せる。

有限非空集合 V を台集合とする。その集合族 $\mathbb{K}$ が、集合の共通部分をとる操作で閉じていてかつ $V \in \mathbb{K}$ のとき、**閉集合族**と呼ぶことにする。閉集合族の各集合の補集合全体のなす合併について閉じた集合族 $\mathbb{O}$ を、その**開集合族**と呼ぶことにする。このとき、

$$\tau(A) = \bigcap X \ : \ X \in \mathbb{K},\ A \subseteq X$$

で**閉包作用素** τ を定義できる。これから、閉集合族のサーキットを次で定義する。

$X \subseteq V - e,\ e \in \tau(X)$ となる X の中の極小な X に対して、(X, e) e を根とする**根付きサーキット**と呼び、その全体を $\mathbb{C}_e$ と書くことにする。根付きサーキット全体を $\mathbb{C} = \{(X, e) :\ X \in \mathbb{C}_e, e \in V\}$ で表わす。

また、閉集合族のコサーキットを次で定義する。$\mathbb{D}_e$ を $Y \subseteq V - e$, $Y \cup e \in \mathbb{O}$ となる Y の中の極小なものの全体とする。$Y \in \mathbb{D}_e$ のとき (Y, e) を**根付きコサーキット**と呼ぶ。根付きコサーキット全体を $\mathbb{D} = \{(Y, e) : Y \in \mathbb{D}_e, e \in V\}$ で表すことにする。

根付きコサーキット (Y, e) に対して $Y \cup e$ は $\mathbb{O}$ の join-irreducible 元になるし、その逆も次の意味で成立する。つまり、$A \in \mathbb{O}$ が join-irreducible であるとき、A' を A がカバーする一意な元とする。このとき任意の元 $e \in A - A'$ に対して $(A - e, e)$ はコサーキットになるし、その逆も成立する。

根付き集合族 $\mathbb{C}$ について、集合 A が circuite closed とは、$e \in V - A, X \subseteq A$ となる $(X, e) \in \mathbb{C}$ が存在しないこととする。

1.1 $\mathbb{C}$ が閉集合族 $\mathbb{K}$ のサーキット族であるとき、circuit closed ($\mathbb{C}$-closed) な集合の族はもとの $\mathbb{K}$ に一致する。

1.2 コサーキットの合併で生成される集合に空集合を加えた集合族は、元の開集合族に一致する。

clutter $\mathbb{A}$ に対して、V の部分集合で $\mathbb{A}$ のすべての現と非空な共通分を持つ集合でかつその性質に関して極小となるものの全体を $B = b(\mathbb{A})$ と書き、$\mathbb{A}$ のブロッカーと呼ぶ。閉集合族のサーキットとコサーキットは、互いにブロッカーになる。つまり、

1.3 任意の $e \in V$ で $b(\mathbb{D}_e) = \mathbb{C}_e$, $b(\mathbb{C}_e) = \mathbb{D}_e$ である。

閉集合族の部分集合の縮約 contraction と還元 reduction を次で定義する。これから閉集合族のマイナーが定義できる。

$(\mathbb{K}, \mathbb{O}; V)$ を閉集合・開集合族とする。$(\mathbb{C}(\mathbb{K}), \mathbb{D}(\mathbb{O}))$ をそのサーキット・コサーキット族とする。

(A) 閉集合族の contraction・開集合族の deletion：任意の部分集合 $A \subseteq V$ に対して、次のように定義する。

$$\mathbb{K}/A = \{X - A \mid X \in \mathbb{K},\ A \subseteq X\} \tag{1.1}$$

$$\mathbb{O} \setminus A = \{X \mid X \in \mathbb{O},\ X \subseteq V - A\} \tag{1.2}$$

このとき $(\mathbb{K}/A)^* = \mathbb{O} \setminus A$ が自明に成立する。さらに、$e \in V - A$ に対して

$$\mathbb{C}(\mathbb{K}/A)_e = \mathbb{C}(\mathbb{K})_e\ /A \tag{1.3}$$

$$\mathbb{D}(\mathbb{O} \setminus A)_e = \mathbb{D}(\mathbb{O})_e \setminus A \tag{1.4}$$

(B) 閉集合族・開集合族の reduction：任意の部分集合 $A \subseteq V$ に対して、次のように定義する。

$$\mathbb{K} - A = \{X - A \mid X \in \mathbb{K}\} \tag{1.5}$$

$$\mathbb{O} - A = \{X - A \mid X \in \mathbb{O}\} \tag{1.6}$$

このとき $(\mathbb{K} - A)^* = \mathbb{O} - A$ が自明に成立する。さらに、$e \in V - A$ に対して

$$\mathbb{C}(\mathbb{K} - A)_e = \mathbb{C}(\mathbb{K})_e \setminus A \tag{1.7}$$

$$\mathbb{D}(\mathbb{O} - A)_e = \mathbb{D}(\mathbb{O})_e\ /A \tag{1.8}$$

2 マトロイドと凸幾何・アンチマトロイドのサーキット

マトロイドはその閉包作用素が次の交換公理を満たすものとして定義できる。

$$x, y \notin \sigma(A),\ x \neq y,\ x \in \sigma(A \cup y) \implies y \in \sigma(A \cup x)$$

このとき閉集合族は、そのフラットの族に一致する。マトロイドの任意のサーキット C とその元 $e \in C$ に対して、$(C \setminus e, e)$ は閉集合族としての根付きサーキットになり、かつその逆も成立する。この意味で、マトロイドのサーキットは、閉集合族の根付きサーキットの特別な場合になっている。同様に、マトロイドのコサーキットは、開集合族のコサーキットの特別な場合になっている。

閉集合族の閉包作用素がつぎの反交換公理を満たすとき、

$$x, y \notin \tau(A),\ x \neq y,\ x \in \tau(A \cup y) \implies y \notin \tau(A \cup x)$$

その閉集合族は**凸幾何**と呼ばれる。凸幾何に対する開集合族 $\mathbb{F}$ は**アンチマトロイド**と呼ばれる。アンチマトロイドの極小非自由集合 C に対して

$$\{C \cap A\ :\ A \in \mathbb{F}\} = 2^C - \{e\}$$

となる元 $e \in C$ が一意に存在する。このとき (C, e) はこのアンチマトロイドのサーキットと呼ばれるが、このとき $(C \setminus e, e)$ は閉集合族としての凸幾何から定まる根付きサーキットになるし、逆も成立する。またアンチマトロイドの元 $A \in \mathbb{F}$ で $A - e \in \mathbb{F}$ となる元 $e \in A$ が一意に存在するとき、(A, e) はアンチマトロイドのパスと呼ばれる。このとき $(A \setminus e, e)$ は、開集合族 $\mathbb{F}$ のコサーキットでありかつその逆も成立する。

2.1 (Seymour [4]) マトロイド M の任意の根付きサーキット族 $\mathbb{C}_e$ が Max Flow Min Cut property を持つための必要十分条件は、M がバイナリマトロイドで F_7^* をマイナーとして含まないことである。

凸幾何・アンチマトロイドの根付きサーキット、パス対は、一般にパックしない。以下はそれが常にパックする (かつ MFMC になる) 例：

1. 木の辺シェリング
2. poset shelling
3. poset の二重シェリング (= 有向グラフの convex sets の凸幾何 (Pfaltz))
4. transitivity antimatroids (= 同一台集合上の半順序のなす凸幾何)
5. グラフ、有向グラフの点探索/辺探索
6. acyclic 有向グラフが定める有向マトロイドの凸幾何 = その有向グラフの transivity アンチマトロイドに同じ。

一般にサーキット、パス対がパックしないアンチマトロイドのクラス：

1. 木の点シェリング
2. 三角化グラフの単体的シェリング
3. 根付き三角化グラフの単体的シェリング
4. affine 空間中の点配置の convex shelling (= realizable な acyclic 有向マトロイドに伴う凸幾何)
5. lower convex shelling in real n-dimensional space $\mathbb{R}^n$
6. B_3–free な join-distributive lattice での doubly irreducible な元のシェリングの定めるアンチマトロイド
7. semilattice の部分束のなす凸幾何

References

[1] P.H. Edelman, "Meet-distributive lattices and the anti-exchange closure," Algebra Universalis 10 (1980) 290–299.

[2] P.H. Edelman and R.E. Jamison, "The theory of convex-geometries," Geometriae dedicata 19 (1985) 247–270.

[3] B. Korte, L. Lovász and R. Schrader, Greedoids, Springer, 1991.

[4] P.D. Syemour, "The matroids with the max-flow min-cut property," *J. Combinatorial Theory* B (1977), 189–222.

Table 1: 概念の対応

閉集合・開集合族	マトロイド	アンチマトロイド
閉集合	マトロイド flat	凸幾何の元 (convex set)
開集合	コサーキットの合併集合と $\emptyset$	アンチマトロイドの元 (feasible set)
閉包作用素	交換公理を満たす	反交換公理を満たす
$(X, e) \in \mathbb{C}$	$X \cup e$ がサーキット	$(X \cup e, e)$ が根つきサーキット
$(Y, e) \in \mathbb{D}$	$Y \cup e$ がコサーキット	$(Y \cup e, e)$ が根つきパス
A 中の極小 sapanning set	A 中の基	端点集合 $Ex(A)$