2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

追加発注をもつ在庫モデルの最適戦略
- 最良の解釈による場合 -

01507094　大阪府立大学 総合科学部　*北條仁志　HOHJO Hitoshi
01302694　大阪府立大学 総合科学部　寺岡義伸　TERAOKA Yoshinobu

1. はじめに

従来の研究では、追加発注は不足分に対してバックログするために行われてきた。しかしながら、在庫維持費用が品切れ損失に比べて小さければ、不足分以上の量を追加発注することにより費用をさらに削減することができる。本稿では、費用最小化の評価基準の下で、追加発注に関する３つの戦略を提案し、供給者にとって都合の良い戦略を考える。従来の期待総費用に関する最適化ではなく、ゲーム論的アプローチにより最適な戦略を導く。

2. モデル

単一施設における一期間の単一製品在庫問題について考える。tを計画期間の長さとする。商品は期首および与えられた時点$t_0(0 \leq t_0 \leq t)$でのみ発注可能である。初期在庫量0から出発し、期首在庫レベルがSになるように発注される。時刻に連れて連続的な需要が発生し、在庫レベルが低下する。もし時点t_0で過剰需要が生じていると、量sを追加発注することができる。sに制限は無く、期首発注量Sとは独立であり、それらの発注量はリードタイム0で満たされる。期首の発注では単位当たりc_1の購入費用が課せられ、追加発注では単位当たりc_2の購入費用が課せられる。商品は価格rで販売される。また、保持されている在庫には単位時間単位当たりの在庫維持費用hがかかり、不足に対しては単位時間単位当たりの品切れ損失費用pがかかる。$g(x)$を$0 \leq x \leq 1$上で定義された$g(0)=0, g(1)=1, \frac{dg(x)}{dx}>0$である$x$の関数とする。期間のある時点$T$までの累積需要量はその期間の総需要量$b$の関数であり、$g(T/t)b$と表される。ここに、確率的に変化するのは需要量のみであり、bは確率変数Bの実現値の１つである。$\phi(\cdot)$をbの確率密度関数とする。$G(x)=\int_0^x g(y)dy$ とおく。

費用や量に関するパラメータに関して次のような仮定を与える。

$$\begin{cases} S \geq 0,\ s \geq 0,\ b \geq 0 \\ h \geq 0,\ p \geq 0,\ 0 \leq c_1 \leq c_2 \leq r \\ \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p + r - c_2 \geq 0 \end{cases}$$

本稿での目的は、追加注文の有効性を調べるために３つの戦略を想定し、総費用の最小化という評価基準の下で追加注文の方法について考察することにある。よって従来の在庫問題でしばしば取り上げられる決定変数S, sは与えられた定数として扱う。

3. 定式化

このモデルでは、需要量bに対して次のような５つの在庫推移の状態が存在する。

(I) $0 \leq b \leq S$

期首在庫量Sによりすべての需要が満たされる。過少需要のため、末期でも在庫を保持することになる。時点t_0での追加発注は行われない。

(II) $S < b \leq S/g(t_0/t)$

時点t_0では在庫を所持しているため、追加発注は行われない。しかしながら、その後の需要により末期には在庫不足の状態となる。

(III) $b > (S+s)/g(t_0/t)$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。このとき、追加発注量sは時点t_0までの過剰需要の一部をバックログすることになる。

(IV) $\max\{S/g(t_0/t), S+s\} < b \leq (S+s)/g(t_0/t)$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。このとき、時点t_0までの過剰需要を完全にバックログし、その上、在庫を保持することになる。しかしながら、その後の需要により末期には再び在庫不足の状態に陥る。

(V) $S/g(t_0/t) < b \leq S+s$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。この追加発注量sが十分大きいため、末期までの需要をすべて満たすことになる。

$C(S,s;b)$を需要量がbである時の総期待費用、

$C_i(S,s;b), i=1,\ldots,5$を各在庫状態に対応する総期待費用とすると、これらは以下のように表される：

$$C(S,s;b) = \begin{cases} C_1(S,s;b), & 0 \le b \le S \\ C_2(S,s;b), & S < b \le S/g(t_0/t) \\ C_3(S,s;b), & b > (S+s)/g(t_0/t) \\ C_4(S,s;b), & \max\{S/g(t_0/t), S+s\} \\ & \quad < b \le (S+s)/g(t_0/t) \\ C_5(S,s;b), & S/g(t_0/t) < b \le S+s \end{cases}$$

そこで

$$C_1(S,s;b) = [c_1+h]S - [hG(1)+r]b,$$

$$C_2(S,s;b) = [c_1-p-r]S + (h+p)\{Sg^{-1}(S/b) - bG(g^{-1}(S/b))\} + pbG(1),$$

$$C_3(S,s;b) = [c_1-p-r]S + (h+p)\{Sg^{-1}(S/b) - bG(g^{-1}(S/b))\} + pbG(1) + [c_2 - r - p(1-t_0/t)]s,$$

$$C_4(S,s;b) = [c_1-p-r]S + (h+p)[S\{g^{-1}(S/b) + g^{-1}((S+s)/b) - t_0/t\} + sg^{-1}((S+s)/b) - b\{G(g^{-1}(S/b)) + G(g^{-1}((S+s)/b)) - G(t_0/t)\}] + pbG(1) - [ht_0/t + p + r - c_2]s,$$

$$C_5(S,s;b) = [c_1 - pt_0/t + h(1-t_0/t)]S + (h+p)[Sg^{-1}(S/b) + b\{G(t_0/t) - G(g^{-1}(S/b))\}] + [h(1-t_0/t)+c_2]s - [hG(1)+r]b$$

経営者による戦略の決定が期首に行わなければならないとき、次の３つの戦略の期待総費用による比較について考える。

- 追加発注をしない(None)
- 時刻t_0に不足をしているならばsだけ補充する (If Shortages)
- 時刻t_0に必ずsだけ補充する(Always)

上述のモデルは２番目の戦略を表している。追加発注を考えていないNone戦略の推移状態は(I)および(II)のみで与えられる。

また、時刻t_0に必ず追加注文をするAlways戦略では上述のモデルにおいて(I),(II)の代わりに次のような推移状態が現れる。

(I') $0 \le b \le \min\{S/g(t_0/t), S+s\}$

期首在庫量Sおよび追加発注量sにより需要量bすべてが満たされる。常に在庫を保持している状況である。

(II') $S+s < b \le S/g(t_0/t)$

時点t_0に在庫を保持しているにもかかわらず、追加発注を行う。しかしながら、その後の需要により末期には在庫不足の状態となる。

各在庫状態に対応する総期待費用$C_i(S,s;b), i = 1', 2'$は以下のようになる：

$$C_{1'}(S,s;b) = [c_1+h]S + [h(1-t_0/t)+c_2]s - [hG(1)+r]b,$$

$$C_{2'}(S,s;b) = [c_1-p-r]S + [c_2 - ht_0/t - p - r]s + (h+p)(S+s)g^{-1}((S+s)/b) + \{pG(1) - (h+p)G(g^{-1}((S+s)/b))\}b$$

4. 最適戦略

前節で計算された総費用をもとに各戦略の期待総費用の比較を行うと、非常に複雑な不等式が現れ、(S,s)上での最適戦略を示す境界線を描くのは容易ではない。これは需要量Bが確率変数であり、その確率密度関数$\phi(b)$を含んでいるためである。一般的に密度関数$\phi(b)$を推定するのも難しい問題である。本稿ではこの複雑さを避けるために、２人０和の行列ゲームに帰着させ、確定的な需要の下で最適な戦略を導く。

供給者は１人のプレーヤであり、３つの離散的な戦略をもつ：None戦略、If Shortages戦略、Always戦略。需要側も１人のプレーヤであり、連続的な戦略をもつ：任意の非負の実数b。このとき、供給者側は自分自身の総費用を最小にするよう努力するが、需要側は相手プレーヤの総費用には全く興味がない。今、供給者側の総費用に関して最良の場合を考える。これは供給者側が総費用を最小にする目的をもつ２人０和の行列ゲームとして扱うことができる。ただし、行列の成分は区間値となっているので、このままでは比較することができない。行列において需要側の戦略である各区間上で需要量bを１つ与えると各成分の値が１つに定まる。このようにして固定された成分をもつ行列を２人０和行列ゲームとして解く。

なお、紙数の都合上、詳細は当日発表させて頂く。

参考文献

[1] Kabak I.W., Partial Returns in the Single Period Inventory Model, IE News, Vol.19, No.2, (1984).

[2] 児玉正憲,『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会 (1996).