2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

コスト有効性に基づいた離散時間ソフトウェア若化スケジュールの推定

土肥正 † (01307065), 岩本一樹 †, 海生直人 ‡ (01002265)
† 広島大学大学院工学研究科, ‡ 広島修道大学経済科学部

1. はじめに

本稿では, 文献 [1, 2] において扱われたソフトウェアシステムの若化 (rejuvenation) スケジュールを決定するための確率モデルについて議論する. 特に, 文献 [3] で考察されたようなコスト有効性と呼ばれる評価規範の下で離散時間モデルについて解析を行い, コスト有効性を最大にする最適なソフトウェア若化スケジュールを導出する. さらに, 障害発生時間データから最適ソフトウェア若化スケジュールを推定するための手続きについても言及する.

2. 離散時間セミマルコフ若化モデル

文献 [1, 2] で考察された連続時間セミマルコフモデルを離散時間環境において再定式化する. ソフトウェアシステムは正常稼動状態から劣化状態へ移行し, 状態 0 から状態 1 へと推移する時間 Y の確率分布関数を $\Pr\{Y \leq n\} = F_0(n)$, $(n = 0, 1, \cdots)$, 確率関数を $\Pr\{Y = n\} = f_0(n)$, 平均を $\mu_0\ (>0)$ とする. 状態 1 から障害が発生するまでの時間 X は, 確率分布関数 $F_f(n)$, 確率関数 $f_f(n)$, 平均 $\mu_f\ (>0)$ をもつ離散形確率変数である. ソフトウェア若化 (予防保全) が開始される以前に障害が発生したならば, 直ちに修理 (事後保全) が開始される. 修理に要する時間は確率分布関数 $F_a(n)$, 平均 $\mu_a\ (>0)$ に従う離散形確率変数であり, 状態 1 へ推移した後 $n_0\ (=0, 1, 2, \cdots)$ 時間経過するまでに障害が発生しなかった場合にはその時点で予防的にシステムの若化が開始され, 確率分布関数 $F_c(n)$, 平均 $\mu_c\ (>0)$ を伴う時間 (オーバーヘッド) が経過した後に状態 0 へ推移する. 状態 0 から再度状態 0 に戻るまでの時間を 1 サイクルと定義すると, ここで考察されているモデルは 4 つの再生点を伴う離散時間セミマルコフ過程となる. モデルの概念図を図 1 に示す.

いま, $c_s\ (>0)$ を単位時間当たりの修理費用, $c_p\ (>0)$ を単位時間当たりのソフトウェア若化費用として定義する. さらに, 次のような仮定を設定する.

(A-1) $c_s\mu_a > c_p\mu_c$.

(A-2) $f_f(0) = 0$.

(A-1) は, 障害が発生した場合の事後保全費用は予防保全費用よりも常に大きいことを意味している. また, (A-2) は状態 0 から状態 1 に推移した時点で障害が発生することはあり得ないことを示唆している. これより, システムが動作を開始した後に次の若化もしくは修理が完了するまでの期間を 1 サイクルとして定義すれば, 1 サイクル中に発生する総期待費用 $V(n_0)$ は

$$V(n_0) = c_s\mu_a F_f(n_0) + c_p\mu_c \overline{F}_f(n_0) \quad (1)$$

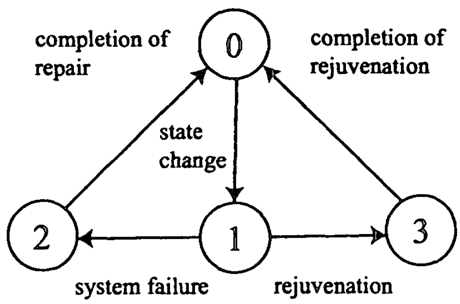

図 1: モデルの概念図.

となる. また, 1 サイクル中にシステムが動作可能な期待時間は

$$S(n_0) = \mu_0 + \sum_{n=0}^{n_0-1} \overline{F}_f(n) \quad (2)$$

であるので, 文献 [3] の結果を直接用いることによって, 上述のモデルにおけるコスト有効性は

$$\begin{aligned} E(n_0) &= S(n_0)/C(n_0) \\ &= \frac{\mu_0 + \sum_{i=0}^{n_0-1} \overline{F}_f(n)}{c_s\mu_a F_f(n_0) + c_p\mu_c \overline{F}_f(n_0)} \end{aligned} \quad (3)$$

のように求めることが出来る.

3. 最適若化スケジュールの推定

問題はコスト有効性 $E(n_0)$ を最大にする最適なソフトウェア若化スケジュール $n_0^*\ (\geq 0)$ を求めることである. $E(n_0)$ の差分をとることにより, 次のような関数を定義する.

$$\delta(n_0) = \frac{\overline{F}_f(n_0)}{C(n_0+1)} - \frac{(c_s\mu_a - c_p\mu_c)S(n_0)f_f(n_0+1)}{C(n_0)C(n_0+1)}. \quad (4)$$

また, $r_f(n) = f_f(n)/\overline{F}_f(n-1)$ を離形確率変数 X の故障率として定義する.

定理 1: (1) $F_f(n)$ が狭義 IFR (Increase Failure Rate) であると仮定する.

(i) $\delta(0)>0$ かつ $\delta(\infty)<0$ ならば，$\delta(n_0^*-1)>0$ かつ $\delta(n_0^*)\le 0$ を満たす最適ソフトウェア若化スケジュール n_0^* $(0<n_0^*<\infty)$ が（少なくとも1つ，せいぜい2つ）存在し，そのときの最大となるコスト有効性は

$$\underline{E}(n_0^*)\le E(n_0^*)<\overline{E}(n_0^*) \tag{5}$$

の関係を満足する．ここで，

$$\underline{E}(n_0^*) = \frac{1}{(c_s\mu_a-c_p\mu_c)r_f(n_0^*+1)}, \tag{6}$$

$$\overline{E}(n_0^*) = \frac{1}{(c_s\mu_a-c_p\mu_c)r_f(n_0^*)} \tag{7}$$

である．

(ii) $\delta(0)\le 0$ のとき，$E(n_0)$ は n_0 の単調減少関数となり，$n_0^*=0$ 及び

$$E(n_0^*)=E(0)=\mu_0/(c_p\mu_c) \tag{8}$$

となる．

(iii) $\delta(\infty)\ge 0$ のとき，$E(n_0)$ は n_0 の単調増加関数となり，$n_0^*\to\infty$ 及び

$$E(n_0^*)=E(\infty)=(\mu_0+\mu_f)/(c_s\mu_a) \tag{9}$$

となる．

(2) $F_f(n)$ が DFR (Decreasing Failure Rate) とすれば，$n_0^*=0$ もしくは $n_0^*\to\infty$ となる．

上述の結果は，障害発生時間分布 $F_f(n)$ に対する標準総試験時間変換を用いることによって以下のように記述することが出来る．離散形確率分布関数 $F_f(n)$ の標準総試験時間変換を

$$\phi(p)=(1/\mu_f)\sum_{n=0}^{F_f^{-1}(p)}\overline{F}_f(n) \tag{10}$$

のように定義する．ここで，逆関数

$$F_f^{-1}(p)=\min\{n_0;F_f(n_0)\ge p\},\quad 0\le p\le 1 \tag{11}$$

が必ず存在するものとする．よく知られた結果として，確率分布関数 $F_f(n)$ が IFR (DFR) であるための必要かつ十分条件は，関数 $\phi(p)$ が2次元平面 $(p,\phi(p))\in[0,1]\times[0,1]$ 上の対角線 p よりも上側に位置することである．

定理 2: コスト有効性 $E(n_0)$ を最大にする最適ソフトウェア若化スケジュールを求める問題は，以下の問題の解 $p^*=F_f(n_0^*)$ $(0\le p^*\le 1)$ を求めることと等価である．

$$\max_{0\le p\le 1}\frac{\phi(p)+\alpha}{p+\beta} \tag{12}$$

ここで，

$$\alpha = \mu_0/\mu_f, \tag{13}$$

$$\beta = c_p\mu_c(c_s\mu_a-c_p\mu_c). \tag{14}$$

次に，障害発生時間分布 $F_f(n)$ は未知であるが，対応する s 個の障害発生時間データの順序統計量 $x_0=0,x_1,x_2,\cdots,x_s$ が観測されており，これらは打ち切りのない完全データであると仮定する．障害発生時間分布 $F_f(n)$ の推定量を x_j $(j=0,1,2,\cdots,s)$ に基づいた経験分布関数

$$F_s(x)=\begin{cases} j/s & \text{for} \quad x_j\le x<x_{j+1} \\ 1 & \text{for} \quad x_s\le x \end{cases} \tag{15}$$

によって定義する．さらに，経験分布関数に基づいた標準総試験時間変換の推定量として，次にような標準総試験時間統計量を定義する．

$$\phi_{sj}=\psi_j/\psi_s. \tag{16}$$

ここで，関数

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{j}(s-k+1)(x_k-x_{k-1}), \quad j=1,2,\cdots,s;\ \psi_0=0 \tag{17}$$

は総試験時間統計量と呼ばれる．最終的に，点列 $(j/s,\phi_{sj})$ $(j=0,1,2,\cdots,s)$ を2次元平面上にプロットし，それらを線分で繋ぐことにより，標準総試験時間プロット (scaled total time on test plot) を得る．推定量 $(j/s,\phi_{sj})$ $(j=0,1,2,\cdots,s)$ は $(p,\phi(p))\in[0,1]\times[0,1]$ のノンパラメトリック推定量であるので，定理2の結果を直接適用することにより，最適ソフトウェア若化スケジュールに関する以下の定理を得る．

定理 3: 障害発生時間に対する $s\ (>0)$ 個の完全データの順序統計量 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_s$ が観測されているものとする．このとき，コスト有効性を最大にする最適ソフトウェア若化スケジュールのノンパラメトリック推定量は，次の式を満たす x_{j^*} によって与えられる．

$$j^*=\left\{j\mid \max_{0\le j\le s}\frac{\phi_{sj}+\alpha}{j/s+\beta}\right\} \tag{18}$$

ここで，式 (13) の μ_f はサンプル平均 $\sum_{k=1}^{s}x_k/s$ によって置き換えられる．

参考文献

[1] Y. Huang, C. Kintala, N. Kolettis and N. D. Funton, Software rejuvenation: analysis, module and applications, *Proc. 25th IEEE Int'l Symp. on Fault Tolerant Computing*, 381–390, IEEE CS Press, CA (1995).

[2] T. Dohi, K. Goševa-Popstojanova and K. S. Trivedi, Estimating software rejuvenation schedule in high assurance systems, *The Computer Journal*, 掲載予定.

[3] 土肥正, 海生直人, 尾崎俊治, コスト有効性に基づいた通信ソフトウェアシステムに対する予防保全スケジュールの決定, 電子情報通信学会論文誌 (A), 掲載予定.