2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

有限時間における最適点検方策

02602443　愛知工業大学大学院　*水谷聡志　MIZUTANI Satoshi
01400043　愛知工業大学　中川覃夫　NAkAGAWA Toshio

1　はじめに

一般に，有限時間における保全方策の最適問題を研究した論文は少ないように思われる [1, 2]．ここでは，ユニットの故障は点検のみで発見されるとし，ある有限な S 時間稼動しなければならないとする．このとき，$(0,S]$ 間において，期待費用を最小にするため，どのような時間間隔で点検すべきかを (1) 定期点検，(2) 一般点検，(3) 近似点検，の３つの場合について，議論する．このような解法は，コンピュータシステムの障害回復技術におけるチェックポイント生成の最適間隔問題に応用できる [3].

2　定期点検

ユニットの稼動時間を有限区間 $(0,S]$ とし，時刻 S では，必ず取替える．区間 $(0,S]$ を N 等分し，時刻 kT $(k=1,2,\dots,N-1)$ で点検し，故障を発見したならば，取替える．

ユニットの故障分布を F，$\overline{F}\equiv 1-F$，$S=NT$ とおいたとき，取替までの期待費用は，

$$
\begin{aligned}
C(N) &= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{kT}^{(k+1)T}\Big\{c_1(k+1)+c_2\big[(k+1)T-t\big] \\
&\qquad + c_3\Big\}\,dF(t) + (Nc_1+c_3)\overline{F}(NT) \\
&= (c_1+c_2T)\sum_{k=0}^{N-1}\overline{F}(kT) - c_2\int_0^S \overline{F}(t)\,dt + c_3 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ところで，$c_1=$ 点検費用，$c_2=$ 故障から発見までの単位時間当りの損失費用，$c_3=$ 取替費用．

式 (1) において，$S/N=T$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
C(N) &= \left(c_1+\frac{c_2S}{N}\right)\sum_{k=0}^{N-1}\overline{F}\left(\frac{kS}{N}\right) \\
&\qquad - c_2\int_0^S \overline{F}(t)\,dt + c_3 \quad (N=1,2,\dots) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

明らかに，

$$
\begin{aligned}
C(1) &= c_1 + c_2\int_0^S F(t)\,dt + c_3 \\
C(\infty) &= \infty \qquad (3)
\end{aligned}
$$

したがって，$C(N)$ を最小にする N^* $(1\le N^*<\infty)$ が存在する．

とくに，$F(t)=1-e^{-\lambda t}$ と仮定すると，

$$
C(N) = \left(c_1+\frac{c_2S}{N}\right)\frac{1-e^{-\lambda S}}{1-e^{-\frac{\lambda S}{N}}} - \frac{c_2}{\lambda}(1-e^{-\lambda S}) + c_3 \qquad (4)
$$

$C(N+1)-C(N)\ge 0$ とおくと，

$$
\frac{e^{-\frac{\lambda S}{N+1}}-e^{-\frac{\lambda s}{N}}}{\dfrac{1-e^{-\frac{\lambda S}{N+1}}}{N}-\dfrac{1-e^{-\frac{\lambda S}{N}}}{N+1}} \ge \frac{c_2}{c_1}S \qquad (5)
$$

一般に，式 (5) の左辺の単調生を示すことは難しい．

式 (4) において，$S/N=T$ とおくと，

$$
C(T) = (c_1+c_2T)\frac{1-e^{-\lambda S}}{1-e^{-\lambda T}} - \frac{c_2}{\lambda}(1-e^{-\lambda S}) + c_3 \qquad (6)
$$

明らかに，

$$
\begin{aligned}
C(0) &= \infty \\
C(S) &= c_1 + c_2\big[S-\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s})\big] + c_3
\end{aligned}
$$

$C'(T)=0$ とおくと，

$$
e^{\lambda T}-(1+\lambda T) = \frac{\lambda c_1}{c_2} \qquad (7)
$$

式 (7) の左辺は 0 から ∞ までの単調増加であるので，式 (7) を満たす有限で唯一の $\tilde{T}$ が存在する．

最適方策

1. もし $\tilde{T}<S$ ならば，$[S/\tilde{T}]\equiv N$ とおき，(4) 式から，$C(N)$ と $C(N+1)$ を比較する．$C(N)\le C(N+1)$ ならば，$N^*=N$ であり，$C(N)>C(N+1)$ ならば，$N^*=N+1$ である．
2. もし $\tilde{T}\le S$ ならば，$N^*=1$

3 一般点検

ユニットの稼動時間を $(0, S]$ としたとき，$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \cdots < x_N = S$ で点検する．2 節と同様にして，取替までの総期待費用は，

$$\mathbf{C}(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[c_1(k+1) + c_2(x_{k+1} - t)\right] dF(t) + c_1 N\overline{F}(S) + c_3 \tag{8}$$

$\partial \mathbf{C}(N)/\partial x_k = 0$ とおくと，

$$x_{k+1} - x_k = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{f(x_k)} - \frac{c_1}{c_2} \quad (k = 1, 2, \ldots, N-1;\ N = 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

このとき，総期待費用は，

$$\mathbf{C}(N) + c_2 \int_0^S \overline{F}(t)\, dt - c_3 = \sum_{k=0}^{N-1} \left[c_1 + c_2 \times (x_{k+1} - x_k)\right] \overline{F}(x_k) \quad (N = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

以上から，$N = 1, 2, \ldots$ に対して，式 (9) から，x_k^* $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ を計算し，式 (10) から期待費用 $\mathbf{C}(N)$ を求める．全ての N に対して，これらを比較し，最小の点検回数 N^* と点検時刻 x_k^* $(k = 1, 2, \ldots, N^* - 1)$ を求めることができる．

4 近似点検

点検密度 [4] を $n(t)$ とおくと，総期待費用の近似解は次のように与えられる [5]:

$$\mathbf{C}(n(t)) = \int_0^S \left[c_1 \int_0^t n(x)\, dx + \frac{c_2}{2n(t)}\right] dF(t) + \overline{F}(S) \int_0^S c_1 n(t)\, dt + c_3 \tag{11}$$

S に関係なく，$n(t)$ で微分して，0 とおくと，

$$n(t) = \sqrt{\frac{c_2 \lambda(t)}{2c_1}} \tag{12}$$

Viscolani [6] は，Euler の方程式を解くことによって，再生密度 $n(t)$ の関数を求めている．

ここでは，式 (12) を利用して，点検回数 N と点検時刻 x_k $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ の近似解を計算する．いま，

$$\int_0^S \sqrt{\frac{c_2 \lambda(t)}{2c_1}}\, dt \equiv X$$

とし，X のガウス記号を $[X] \equiv N$ とおく．さらに，

$$A_N \int_0^S \sqrt{\frac{c_2 \lambda(t)}{2c_1}}\, dt = N$$

となる A_N $(0 < A_N \leq 1)$ を求め，

$$\tilde{n}(t) = A_N \sqrt{\frac{c_2 \lambda(t)}{2c_1}} \tag{13}$$

とおく．

$$\int_0^{x_k} \tilde{n}(t)\, dt = k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{14}$$

となる x_k を順次求める．このとき，

$$\mathbf{C}(N) + c_2 \int_0^S \overline{F}(t)\, dt - c_3 = \sum_{k=0}^{N-1} \left[c_1 + c_2(x_{k+1} - x_k)\right] \overline{F}(x_k) \tag{15}$$

を計算する．ところで，$x_0 = 0$, $x_N = S$ に注意する．つぎに，式 (13) において，N を $N+1$ とおき，同様の計算をする．最後に $\mathbf{C}(N)$ と $\mathbf{C}(N+1)$ を比較し，小さい方を最適回数の近似解とする．

参考文献

[1] 三根久, 河合一：信頼性・保全性の数理, 朝倉書店, 1982.

[2] R.E.Barlow and F.Proschan : *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley, New York, 1965.

[3] 福本聡, 海生直人, 尾崎俊治：コンピュータシステムの障害回復技術, 日本 OR 学会誌, vol.40, pp.198-204, 1995.

[4] J.B.Keller : Optimum checking schedules for systems subject to random failure, *Management Science*, vol.21, pp.256-260, 1974.

[5] N.Kaio and S.Osaki : Comparison of inspection policies, *J. of Operational Research Soc.*, vol.40, pp.499-503, 1989.

[6] B.Viscolani : A note on checking schedules with finite horizon, *R.A.I.R.O. Operations Research*, vol.25, pp.203-208, 1991.