2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

複数回の故障に対して取替えを行う保証契約モデル

02800014 流通科学大学大学院 * 林坂 弘一郎 RINSAKA Koichiro
01204194 流通科学大学情報学部 三道 弘明 SANDOH Hiroaki

1. はじめに

製品の保証は企業の競合戦略において重要な要素となっている．現在，家電のような製品はその故障に対してメーカによって1年間保証されていることが多い．また，家電製品を販売する小売業者の中には顧客と独自に保証契約 [1] を結ぶ業者も少なくない．本研究では，保証期間中の最初の k 回目までの故障に対して取替えを行うという保証契約 [2] に対して，顧客と小売業者それぞれの最適戦略を明らかにする．

2. モデル

システム導入後の保証期間を $\tau(>0)$，運用計画期間を $T(>\tau)$ とする．保証期間中 $(0,\tau]$ にシステムが故障すれば小売業者が無料で保守を行う．保証期間後 $(\tau,T]$ にシステムが故障した場合には各故障に対して $C_s(>0)$ の料金で保守を行う．小売業者は顧客に以下の3種類のオプションを提供していると仮定する．

(1) オプション A_1 小売業者は契約料金 $P_a(>0)$ を追加することで保証期間中の最初 $k(k=1,2,\cdots)$ 回目までの故障に対して無料で取替えを行う．保証期間中の $k+1$ 回目以降の故障に対しては無料で保守を行う．保証期間後は各故障につき C_s の料金で保守を行う．

(2) オプション A_2 小売業者は保証期間中の故障に対しては無料で保守を行い，保証期間後は各故障につき C_s の料金で保守を行う．

(3) オプション A_0 システムを購入しない．

オプション A_1 の契約の下では，k 回目までの故障に対して小売業者は無料で取替えを行う．しかし，これ以外の故障に対しては小修理を行い，保守後のシステムの信頼度は故障前のそれと等しくなると仮定する．$i(i=1,\cdots,k)$ 回目の故障時刻を X_i とし，保証期間後の故障回数を N_1 とする．このとき N_1 は

$$
\Pr\{N_1=n\} = \begin{cases} \frac{[H(T)-H(\tau)]^n}{n!}e^{-[H(T)-H(\tau)]} \\ \qquad X_1>\tau,\quad n=0,1,2,\cdots \\ \frac{[H(T-X_i)-H(\tau-X_i)]^n}{n!} \\ \times e^{-[H(T-X_i)-H(\tau-X_i)]} \\ \qquad X_i\le\tau,\quad X_{i+1}>\tau, \\ \qquad i=1,2,\cdots,k-1,\quad n=0,1,2,\cdots \\ \frac{[H(T-X_k)-H(\tau-X_k)]^n}{n!} \\ \times e^{-[H(T-X_k)-H(\tau-X_k)]} \\ \qquad X_k\le\tau,\quad n=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{1}
$$

を満たす．ここで，$H(t)$ は非同次ポアソン過程の平均値関数であり，$[H'(t)]'=h'(t)>0$ を仮定する．なお，修理や取替えは瞬時に終了するものと仮定する．

これに対して，オプション A_2 の下で，保証期間後の故障回数を N_2 とすると，N_2 は次式を満たす．

$$
\Pr\{N_2=n\} = \frac{[H(T)-H(\tau)]^n}{n!}e^{-[H(T)-H(\tau)]}, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{2}
$$

3. 顧客の期待効用

ここでは，A_1，A_2，A_0 の3種類のオプションを選択した場合の顧客の期待効用を導出する．オプション A_k を選択したときの顧客の金銭的利潤を $\omega(A_k)$，$k=0,1,2$ と書き，効用を $U[\omega(A_k)]$，$k=0,1,2$ と書くこととする．以下では，顧客の効用関数として次式で与えられる絶対的危険回避度一定の効用関数を適用する．

$$
U[\omega(A_k)] = \left[1-e^{-\beta\omega(A_k)}\right]/\beta,\quad \beta>0 \tag{3}
$$

なお，β は顧客のリスクに対する態度を表し，式 (3) の効用関数をもつ顧客は危険回避的な主体である．

オプション A_1 を選択したとき，保証期間中の最初の k 回目までの故障に対しては無料で取替えが実施される．更に，保証期間中の $k+1$ 回目以降の故障に対しては無料で，保証期間後の故障については C_s の費用で小修理を行うこととなる．システムの導入費用を $P_s(>0)$ とすると，顧客にかかる費用はシステム導入費用 P_s，取替保証契約費用 P_a，及び保証期間後の保守費用 C_sN_1 となる．システムの運用によって得られる単位時間当りの収益を $R(>0)$ とする．式 (1), (3) より，オプション A_1 を選択したときの顧客の期待効用は次式となる．

$$
\begin{aligned}
&E[U(A_1;P_a,C_s)] \\
&=\tfrac{1}{\beta}\Big\{1-e^{-\beta(RT-P_s-P_a)}\big[e^{-\xi(1-e^{\beta C_s})}\overline{F}(\tau) \\
&\quad+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^\tau e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})}f^{(i)}(x)\overline{F}(\tau-x)dx \\
&\quad+\textstyle\int_0^\tau e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})}f^{(k)}(x)dx\big]\Big\}
\end{aligned} \tag{4}
$$

なお，$\rho(x)\equiv H(T-x)-H(\tau-x)$，$\xi\equiv H(T)-H(\tau)$ と定義する．$F(t)=1-e^{-H(t)}$ は初回の故障分布関数であり $\overline{F}(t)=1-F(t)$，$f(t)=dF(t)/dt$ である．$f^{(k)}(t)$ は $f(t)$ の k 重たたみこみである．

オプション A_2 において，システムの運用により発生する収益はオプション A_1 のときと同様である．顧客にかかる費用はシステムの導入費用 P_s と保証期間後の保守費用 C_sN_2 である．したがって，式 (2), (3) より，オプション A_2 を選択したときの顧客の期待効用は次式となる．

$$
\begin{aligned}
&E[U(A_2;P_a,C_s)] \\
&= \tfrac{1}{\beta}\left[1-e^{-\beta(RT-P_s)-\xi(1-e^{\beta C_s})}\right]
\end{aligned} \tag{5}
$$

オプション A_0 を選択した場合，つまりシステムを購入しなかった場合，顧客には収益も費用も発生しない．したがって，顧客の期待効用は $E[U(A_0;P_a,C_s)]=0$ となる．

4. 小売業者の期待利益

顧客がオプション $A_k(k=0,1,2)$ を選択したときの小売業者の期待利益を $E[\pi(P_a,C_s;A_k)]$ と書くこととする．このとき，$E[\pi(P_a,C_s;A_k)]$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&E[\pi(P_a,C_s;A_1)]\\
&=P_a-P_s\textstyle\sum_{i=1}^{k}F^{(i)}(\tau)\\
&\quad+C_s\{\xi\overline{F}(\tau)+\int_0^{\tau}\rho(x)f^{(k)}(x)dx\\
&\quad+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau}\rho(x)f^{(i)}(x)\overline{F}(\tau-x)dx\}\\
&\quad-C_r[H(T)\overline{F}(\tau)+\int_0^{\tau}H(T-x)f^{(k)}(x)dx\\
&\quad+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau}H(T-x)f^{(i)}(x)\overline{F}(\tau-x)dx] \quad (6)
\end{aligned}
$$

$$E[\pi(P_a,C_s;A_2)]=[H(T)-H(\tau)]C_s-H(T)C_r \quad (7)$$

$$E[\pi(P_a,C_s;A_0)]=0 \quad (8)$$

となる．なお，$C_r(>0)$ は小売業者の小修理費用であり，$F^{(i)}(t)$ は分布関数 $F(t)$ の i 重たたみこみである．

5. 最適戦略

5.1 顧客の最適戦略

はじめに，オプション A_1 と A_2 の比較を行う．$E[U(A_1;P_a,C_s)]=E[U(A_2;P_a,C_s)]$ としてこれを P_a に関して解くと，次式の無差別曲線が得られる．

$$
\begin{aligned}
P_a=&\tfrac{1}{\beta}\{-\xi\left(1-e^{\beta C_s}\right)-\ln[e^{-\xi(1-e^{\beta C_s})}\overline{F}(\tau)\\
&+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau}e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})}f^{(i)}(x)\overline{F}(\tau-x)dx\\
&+\int_0^{\tau}e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})}f^{(k)}(x)dx]\} \quad (9)
\end{aligned}
$$

式 (9) の右辺を $\Psi_1(C_s)$ と書く．このとき $\Psi_1(C_s)$ は C_s に関して単調増加関数である．

次に，$E[U(A_1;P_a,C_s)]=0$ を P_a について解き P_a の留保価格を $\Psi_2(C_s)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\Psi_2(C_s)\\
&=RT-P_s-\tfrac{1}{\beta}\ln[e^{-\xi(1-e^{\beta C_s})}\overline{F}(\tau)\\
&\quad+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau}e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})}f^{(i)}(x)\overline{F}(\tau-x)dx\\
&\quad+\int_0^{\tau}e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})}f^{(k)}(x)dx] \quad (10)
\end{aligned}
$$

となる．$\Psi_2(C_s)$ は C_s に関して単調減少である．

更に，$E[U(A_2;P_a,C_s)]=0$ として C_s の留保価格を $\overline{C_s}$ とすると

$$\overline{C_s}=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{\beta(RT-P_s)}{\xi}+1\right] \quad (11)$$

となり，$\overline{C_s}$ は P_a 軸と平行な直線となる．ここで，$\Omega_i(i=0,1,2)$ を以下で定義する．

$$
\begin{aligned}
\Omega_0 &= \{(P_a,C_s):P_a\geq\Psi_2(C_s),\,C_s\geq\overline{C_s}\}\\
\Omega_1 &= \{(P_a,C_s):P_a<\Psi_1(C_s),\,P_a<\Psi_2(C_s)\}\\
\Omega_2 &= \{(P_a,C_s):P_a\geq\Psi_1(C_s),\,C_s<\overline{C_s}\}
\end{aligned}
$$

このとき，顧客の最適戦略 $A^*(P_a,C_s)$ は次式となる．

$$
A^*(P_a,C_s)=\begin{cases}A_1 & \text{if } (P_a,C_s)\in\Omega_1\\ A_2 & \text{if } (P_a,C_s)\in\Omega_2\\ A_0 & \text{if } (P_a,C_s)\in\Omega_0\end{cases} \quad (12)
$$

5.2 小売業者の最適戦略

小売業者の最適戦略は顧客の反応を考慮したうえで自身の期待利益が最大となるような (P,C_s) の組み合わせである．

(1) オプション A_1 のとき $(P_a,C_s)\in\Omega_1$ のとき，顧客はオプション A_1 を選択し，このときの小売業者の期待利益は式 (6) で与えられる．式 (6) を P_a，C_s に関して偏微分するとそれぞれ正となることから，小売業者の期待利益は $\Psi_2(C_s)$ 上のある 1 点において最大となる．ここで，式 (10) を式 (6) の P_a に代入し，これを $\Pi(C_s)$ と書くこととすると，$\Pi(C_s)$ は

$$
\begin{aligned}
&\Pi(C_s)\\
&=RT-P_s[1+\textstyle\sum_{i=1}^{k}F^{(i)}(\tau)]\\
&\quad-\tfrac{1}{\beta}\ln[e^{-\xi(1-e^{\beta C_s})}\overline{F}(\tau)\\
&\quad+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau}e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})}f^{(i)}(x)\overline{F}(\tau-x)dx\\
&\quad+\int_0^{\tau}e^{-\rho(x)(1-e^{\beta C_s})}f^{(k)}(x)dx]\\
&\quad+C_s[\xi\overline{F}(\tau)+\int_0^{\tau}\rho(x)f^{(k)}(x)dx\\
&\quad+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau}\rho(x)f^{(i)}(x)\overline{F}(\tau-x)dx]\\
&\quad-C_r[H(T)\overline{F}(\tau)+\int_0^{\tau}H(T-x)f^{(k)}(x)dx\\
&\quad+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau}H(T-x)f^{(i)}(x)\overline{F}(\tau-x)dx] \quad (13)
\end{aligned}
$$

となる．なお，$\Pi(C_s)$ の単調性を解析的に示すことは困難である．

(2) オプション A_2 のとき $(P_a,C_s)\in\Omega_2$ のとき，顧客の選択はオプション A_2 となり，小売業者の期待利益は式 (7) で与えた．式 (7) を C_s に関して微分すると正となる．したがって，小売業者の期待利益を最大にするのは $C_s^*\to\overline{C_s}-0$ かつ $P_a^*>\Psi_2(C_s^*)$ のときである．

(3) オプション A_0 のとき $(P_a,C_s)\in\Omega_0$ のとき，顧客はオプション A_0 を選択する．このとき，小売業者は自身の期待利益を制御することはできない．

以上のことから，顧客がオプション A_1 または A_2 を選択した場合の小売業者の期待利益が少なくとも一方でも正となる場合，自身の期待利益が最大となるオプションを顧客に選択させることが小売業者の最適戦略となる．

なお，紙数の都合上，数値例は当日発表させて頂く．

参考文献

[1] 林坂弘一郎，三道弘明，“保証期間延長契約に関する一考察，” 電子情報通信学会論文誌，Vol.J84-A，No.4，pp.528–542，2001.

[2] 林坂弘一郎，三道弘明，中川覃夫，“複数回の取替を伴う保証を考慮した予防取替方策，” 電子情報通信学会論文誌，Vol.J85-A，No.3，2002 (印刷中)．