2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

進行方向片側のみサービス可能な巡回路問題

02602400　防衛大学校情報工学科　*間方　仁一　MAGATA Jinichi
01107880　防衛大学校情報工学科　片岡　靖詞　KATAOKA Seiji

1　問題の定義

平面上に枝が交差することなく描かれている無向グラフ $G=(V,E)$ を考える．**領域**とは，極小の閉路で囲まれた部分をいう．このグラフを道路網と捉え，車両でサービス巡回する場合，サービスは進行方向の片側のみに限られる（日本の場合は左側）．領域を構成する枝の少なくとも1本を左回り（反時計回り）に通るとき，その領域を**サービスする**ということにする．

本研究では，各枝に距離が与えられているとき，全ての領域をサービスする最小の巡回路を求める問題を扱い，**片側サービス巡回路問題** (one-side-service routing problem: OSSRP) と呼ぶことにする（図1）．

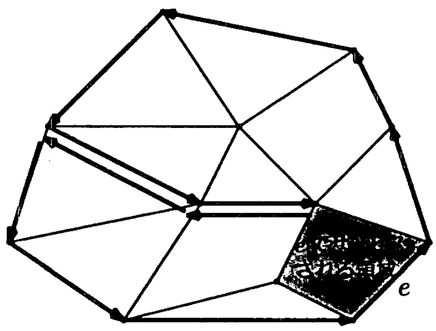

図 1: 領域・サービスと枝方向・実行可能解の例

OSSRPには，以下に掲げる条件の設定により，いくつかの変形が考えられるが，本稿では太字で示したような設定で議論をすすめる．別の設定についても，簡単に変換可能な場合には，適宜コメントする．

1. デポとなる点が与えられて いる／**いない**.
2. 同じ点を2度とおって **よい**／いけない.
3. 同じ枝を同じ方向に2度とおって よい／**いけない**.
4. Uターンを **許す**／許さない.

2　$\mathcal{NP}$-困難性

ここでは，OSSRPを一般化巡回セールスマン問題 (GTSP) に帰着させることを考える．GTSPとは，点集合がいくつかのクラスタに分割されており，各クラスタから少なくとも1点以上通るような最小巡回路を求める問題である．各クラスタのサイズを1と捉えると，GTSPは通常のTSPと同じになるので，$\mathcal{NP}$-困難な問題であることが示されている．

G の各枝に対して2点ずつ両側に配置する．各点は，サービスできる側の領域に応じて，通過する方向を示す．図2において，枝 e_1 を太矢印の方向に通った場合，その後は点線矢印に示されるように枝 e_2，e_3 を通る，Uターンして枝 e_1 を逆に通るの3通りが考えられて，各進路に対しサービスできる側に対応する点へ有向枝を設ける．変換した枝の長さは，元のグラフで採った進路の枝の長さに対応させる．このような変換をした問題は，陰影部を各クラスタと捉えればGTSPになるため，OSSRPも $\mathcal{NP}$-困難になることが示される．

デポの有無はダミーを設け，入出力枝と距離を適当に決めればよい．また，Uターンを許さない場合は，枝の両側にある点を結ぶ枝を除去すればよい．

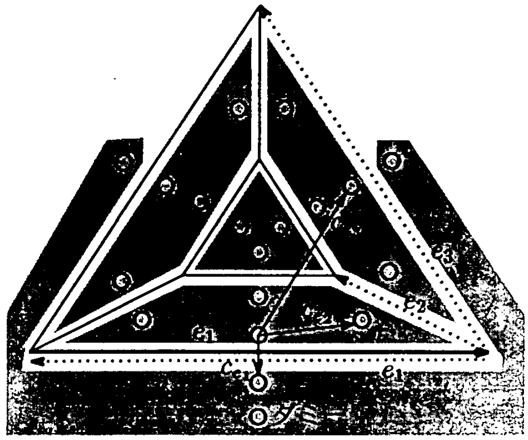

図 2: OSSRPからGTSPへの変換

3　定式化

非対称型のGTSPとしては，Laporteら [1] によるものと，Noonら [2] によるものが代表である．GTSPは各クラスタを訪れる回数が丁度1度のもの (Noon) と，2度以上でもよいもの (Laporte) とに大別される．上記で変換した問題は，Laporteの解法をそのまま適用することができる．しかしながら，点の数が枝数の2倍になってしまうので，この方法では限界が見えている．ここでは元の G に則ったアプローチを試みる．

$G=(V,E)$ の領域集合を $R(|R|=|E|-|V|+1)$ とする．OSSRPでは，各枝を通る方向に応じて，サービ

スできる領域に違いがあるため，各枝に両方向に向きを与えた有向グラフ $\overleftrightarrow{G}=(V,\overleftrightarrow{E}), c_{ij}=c_{ji}$ として定式化を行う．$\overleftarrow{E}(r)$ を領域 r を構成する極小サイクルを左回り（反時計回り）に通る枝集合，$V(r)$ をそのサイクル上の点集合とする．また，$\delta^+(S)=\{(i,j)|S\subset V, i\in S, j\in V\setminus S, (i,j)\in\overleftrightarrow{E}\}$，逆に $\delta^-(S)=\{(i,j)|S\subset V, i\in V\setminus S, j\in S, (i,j)\in\overleftrightarrow{E}\}$ とする．$S=\{v\}$ のときは，$\delta^+(v)(\delta^-(v))$ と略記する．

$$\min \sum_{(i,j)\in\overleftrightarrow{E}} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} = 0 \quad \forall i\in V \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S=\bigcup_{r\in X} V(r), \quad X\subset R, X\neq\emptyset \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j)\in\overleftarrow{E}(r)} x_{ij} \geq 1 \quad \forall r\in R \tag{4}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall(i,j)\in\overleftrightarrow{E} \tag{5}$$

同じ枝を同じ向きに 2 度以上とおってよい場合は，(5) 式の 0-1 制約を非負整数とすればよい．

4 下界値

上記の (2) 式を各領域の点 $i\in V(r)$ $(r\in R)$ 毎に合計したものを (2ʳ) とする．さらに (2) 式をラグランジュ緩和した問題を考える．

$$\min \sum_{(i,j)\in\overleftrightarrow{E}} (c_{ij}+\lambda_i-\lambda_j)x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\overleftrightarrow{E}} c^\lambda_{ij}x_{ij} \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad (2^r), (3), (4), (5)$$

この問題からさらに (4) 式を除いた問題は，各領域を点とみなすとき，**同じ点（領域）を 2 度以上通ってよい巡回路問題**と考えることができる．このような問題を TSP² と記述する．ここで，G の**双対グラフ（有向）** G^d を考え，再び 2 節の GTSP への変換法に注目する．G の領域 r_i に対応する G^d の点を大文字 I で示すと，G^d の枝 (I,J) の距離は，図 2 で枝 e_1 を左回りに通った後，サービスする領域が変わる e_1 や e_3 に進路をとる場合に対応させる．一般に (I,J) を結ぶ有向枝は複数存在するが，各領域内での巡回路としての連続性（(2) 式）が緩和されているので，(7) 式のようにそれらのうち最小のものだけを採用すればよい．

$$c_{IJ}=\min\{c^\lambda_e | e \text{はサービス領域が} r_i \text{から} r_j \text{へ変わる枝}\} \tag{7}$$

この変換により，各領域を巡回することと，その領域をサービスすることとが対応しているので，G^d における TSP² の実行可能解は，除いた (4) 式をも満足していることに注意する．

また，図 2 において，e_1 を左回りに通った後，e_2 の進路をとるような領域間を結ばない枝は，点 I 内の潜在枝 e^I としておく．目的関数 (6) 式の最小化のためには，$c^\lambda_{e^I}$ の値が負の場合のみ TSP² の解とは独立に必要になるので，その合計値を TSP² の最適値に加えればよい．このようにして選ばれた枝が，もし各領域内でも巡回路の連続性 (2) を満足していれば，もとのグラフ G での実行可能解に一意に変換できることは自明である．

TSP² は，距離行列が**三角不等式**を満足していれば，同じ点を 2 度通ることは目的関数の最小化に逆行するため，通常の TSP として扱うことができる．そこで G^d 上で定義された TSP² の前処理として，全点間の最短距離とその路を求めておけばよい．このとき，G^d における巡回路は，G における巡回路と必ずしも対応していないので，負サイクルが生じないような λ を選ぶことに注意が必要である．このようにして得られるラグランジュ緩和問題の最適値は，OSSRP の下界値として活用できる．

5 上界値

上界値としては，G^d を完全グラフ化してしまうので，3-opt など非対称型 TSP の局所探索法が適用できる．そして，**領域のサービス順序が固定されている条件下では，最短路問題**を解くことで OSSRP の最適解も簡単に得ることができる．このようにして得られる上界値は，かなり良いものであると期待できる．

この他にも，各点の入出力次数が等しい有向オイラーグラフに注目し，**全領域をサービスできる連結した有限数のサイクルによる有向オイラーグラフ**を生成する方法などが考えられる．最も自明なサイクルおよびオイラーグラフとしては，$(V, \cup_{r\in R}\overleftarrow{E}(r))$ があり，これらのうち無駄な枝を逐次除去する方法などが考えられる．

これら上下界値の効果などについては当日報告する．

参考文献

[1] Laporte: GTSP. *Dis. Ap. Math.* 18(1987)185-197.
[2] Noon: GTSP. *Ope. Res.* 39(1991)623-632.