2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

一般化最小費用独立フロー問題とその多項式時間アルゴリズム

02005304　大阪大学　*江口 明伸　EGUCHI Akinobu
01502254　大阪大学　藤重 悟　FUJISHIGE Satoru
02301850　大阪大学　高畑 貴志　TAKABATAKE Takashi

1.　はじめに

独立フロー問題は，複数個の入口と出口からなる点集合上に劣モジュラ制約を与えることにより，通常のネットワークフロー問題を拡張したもので，独立マッチング問題，独立割当問題など実際問題への応用範囲が広い．ここでは，各枝 a についてフローの利得 $\alpha(a)$ を考えることにより，最小費用独立フロー問題をさらに一般化して考える．この利得のために，枝 a にその始点から流れ始めたフローは $\alpha(a)$ 倍されてその終点に到達する．本文では，このように定義される一般化最小費用独立フロー問題に対する多項式時間アルゴリズムを与える．

2.　劣モジュラシステム

E を有限集合とし，分配束 $\mathcal{D} \subseteq 2^E(\emptyset, E \in \mathcal{D})$ に対して，関数 $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ が以下の条件を満たすとする．

$$\forall X, Y \subseteq \mathcal{D} : f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y).$$

このとき f を $\mathcal{D}$ 上の劣モジュラ関数といい，$f(\emptyset) = 0$ であるとき $(\mathcal{D}, f)$ を E 上の劣モジュラシステムという．その基多面体を $\mathrm{B}(f)$，従属関数を dep，交換容量を $\tilde{c}$ と表す [1].

また E の部分集合として単調に増大する $\mathcal{D}$ の元の系列 $\mathcal{C} : S_0 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k$ を $\mathcal{D}$ の鎖といい，$\mathcal{C}$ を真の部分系列として含む $\mathcal{D}$ の鎖が存在しないとき，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の極大鎖と呼ぶ．ここで任意の極大鎖に対して，E の分割が $\Pi(\mathcal{D}) = \{S_i - S_{i-1} \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$ で与えられる．

3.　一般化最小費用独立フロー問題

点集合 V と枝集合 A を持ち，入口と出口の点集合 $S^+ \subseteq V$, $S^- \subseteq V$ が指定されたグラフ $G = (V, A; S^+, S^-)$ を考える．ここで，$S^+ \cap S^- = \emptyset$ と仮定し，$|V| = n$, $|A| = m$ とする．また，容量関数 $c : A \to \mathbb{R}_+$，費用関数 $\gamma : A \to \mathbb{R}$，利得関数 $\alpha : A \to \mathbb{R}_+$ が指定され，さらに，$(\mathcal{D}^+, f^+)$, $(\mathcal{D}^-, f^-)$ をそれぞれ入口 S^+ と出口 S^- の上の劣モジュラシステムとする．以上のように定義されたネットワーク $\mathcal{N}_{GI} = (G = (V, A; S^+, S^-), c, \gamma, \alpha, (\mathcal{D}^+, f^+), (\mathcal{D}^-, f^-))$ が与えられたとき，つぎの問題を考える．

$$
\begin{aligned}
P_{GI} : \text{Minimize} \quad & \sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a) \\
\text{subject to} \quad & 0 \leq \varphi(a) \leq c(a) \quad (a \in A), \\
& \partial\varphi(v) = 0 \quad (v \in V - (S^+ \cup S^-)), \\
& \partial^+\varphi \in \mathrm{B}(f^+), \\
& \partial^-\varphi \in \mathrm{B}(f^-).
\end{aligned}
$$

ここで，境界 $\partial\varphi : V \to \mathbb{R}$ は

$$\partial\varphi(v) = \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \alpha(a)\varphi(a) \quad (v \in V)$$

によって定義され，$\partial^+\varphi$ $(\partial^-\varphi)$ は $\partial\varphi$ $(-\partial\varphi)$ の S^+ (S^-) 上への制限である．さらに，一般性を失うことなく，$\mathbb{0} \in \mathrm{B}(f^+)$, $\mathbb{0} \in \mathrm{B}(f^-)$ であると仮定する．

上記の問題の実行可能フローを一般化独立フローと呼び，この問題を一般化最小費用独立フロー問題という．各枝の容量，費用と劣モジュラ関数値は整数であり，利得は2つの整数の比で与えられ，これらの整数の絶対値の最大値が B であるとする．また，最適解の費用の $(1-\epsilon)$ 以下の費用を持つ一般化独立フローは ϵ-最適であるという．

以下では，任意な基多面体上の交換容量を η 時間で計算できると仮定する．

4.　一般化最小費用独立フロー問題の解法

$\mathcal{N}_{GI}$ 上のある一般化独立フロー φ に対して，補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), c_\varphi, \gamma_\varphi, \alpha_\varphi)$ の枝集合は，

$$
\begin{aligned}
A_\varphi &= A_\varphi^+ \cup A_\varphi^- \cup A_\varphi^* \cup B_\varphi^*, \\
A_\varphi^+ &= \{(u, v) \mid v \in S^+, u \in \mathrm{dep}^+(\partial^+\varphi, v) - \{v\}\}, \\
A_\varphi^- &= \{(v, u) \mid v \in S^-, u \in \mathrm{dep}^-(\partial^-\varphi, v) - \{v\}\}, \\
A_\varphi^* &= \{a \mid a \in A, \varphi(a) < c(a)\}, \\
B_\varphi^* &= \{\bar{a} \mid a \in A, \varphi(a) > 0\} \quad (\bar{a} : a \text{の逆向き枝}),
\end{aligned}
$$

容量関数 $c_\varphi : A_\varphi \to \mathbb{R}_+$ は，各枝 $a \in A_\varphi$ に対し

$$
c_\varphi(a) = \begin{cases}
\tilde{c}^+(\partial^+\varphi, v, u) & (a = (u, v) \in A_\varphi^+) \\
\tilde{c}^-(\partial^-\varphi, v, u) & (a = (v, u) \in A_\varphi^-) \\
c(a) - \varphi(a) & (a \in A_\varphi^*) \\
\alpha(\bar{a})\varphi(\bar{a}) & (a \in B_\varphi^*),
\end{cases}
$$

費用関数 $\gamma_\varphi : A_\varphi \to \mathbb{R}$ は，各枝 $a \in A_\varphi$ に対し

$$
\gamma_\varphi(a) = \begin{cases}
\gamma(a) & (a \in A_\varphi^*) \\
-\gamma(\bar{a}) & (a \in B_\varphi^*) \\
0 & (a \in A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-),
\end{cases}
$$

と定義される．また利得関数 $\alpha_\varphi : A_\varphi \to \mathbf{R}_+$ を，各枝 $a \in A_\varphi$ に対して

$$\alpha_\varphi(a) = \begin{cases} \alpha(a) & (a \in A_\varphi^*) \\ 1/\alpha(\bar{a}) & (a \in B_\varphi^*) \\ 1 & (a \in A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-) \end{cases}$$

と定義する．

最小費用独立フロー問題では，補助ネットワーク上で負の費用の閉路を求め，これに沿ってフロー変更することによって目的関数値を減少させることができるが，ここでは閉路に利得を考える必要がある．

閉路の利得は，その上の枝の利得の積として定義する．閉路はその利得が 1 に等しいとき単位利得閉路，1 より大きいときフロー生成閉路，1 より小さいときフロー吸収閉路と呼ばれる．また，フロー生成閉路からフロー吸収閉路まで有向道が存在するとき，これらをあわせて双閉路と呼ぶ．単位利得閉路または双閉路上の正の循環フローをサーキットといい，$\mathcal{N}_\varphi$ 上のサーキットに沿うフロー変更によって少なくとも 1 本の枝が飽和するとき，この操作をサーキット消去という．

ここでは，一般化最小費用独立フロー問題において，サーキット消去により目的関数値を減少させることを考えるが，サーキット ψ について，費用と容量の比率 μ を $t(a) = 1/c_\varphi(a)$ として

$$\mu = \sum_{a \in A_\varphi} \gamma(a)\psi(a) / \sum_{a \in A_\varphi} t(a)\psi(a)$$

と定義し，以下に近似アルゴリズムを示す．入力として，$\mathcal{N}_{GI}$ 上の初期の一般化独立フロー φ と $\epsilon > 0$ が与えられているとする．

Step 1: $\mathcal{N}_\varphi$ 上で比率の最小値 μ を求める．
Step 2: $\mu \geq -\epsilon m B^2/(m+n^2)$ であれば停止する（φ は ϵ-最適である）．そうでなければ $\mu \leftarrow \mu/2$ とおく．
Step 3: $\mathcal{N}_\varphi$ 中に，比率が μ 以下のサーキットがある限り，そのようなサーキットを見出し，それを消去できる流量の $1/2n$ だけサーキットに沿ってフロー変更し，φ を更新する．Step 2 へ行く．

補題 1: $\mathcal{N}_\varphi$ 中のサーキット ψ が負の費用を持ち，その比率が μ のとき，ψ を消去する $1/2n$ の流量だけ ψ に沿ってフロー変更することができ，このとき，目的関数値は少なくとも $\mu/2n$ だけ減少する．□

現在の μ に対する Step 3 の 1 回の実行による目的関数値の減少量は高々$2\mu(m+n^2)$ であるから，補題 1 より，Step 3 ではサーキットに沿うフロー変更を $\mathrm{O}((m+n^2)n)$ 回実行する．また，$c_\mu(a) = c_\varphi(a) - \mu t(a)$ として c_μ について負の費用のサーキットを求めることにより，比率が μ 以下のサーキットを $\tilde{\mathrm{O}}((m+n^2)n^2)$ 時間で求めることができる [2]．

定理 2: 上記のアルゴリズムは $\tilde{\mathrm{O}}((n^2+\eta)\, n^5 \log(1/\epsilon))$ 時間で ϵ-最適な一般化独立フローを求める．□

B^{-10m}-最適解以下の目的関数値を持つ端点解は最適解であることが示されるが，以下では，ある一般化独立フロー φ が与えられたとき，費用が $\gamma(\varphi)$ 以下で端点解であるような別の一般化独立フローを求めることを考える．与えられた φ に対して，$\mathcal{D}_\varphi^+ = \{X \mid X \subseteq S^+, \partial^+\varphi(X) = f^+(X)\}$, $\mathcal{D}_\varphi^- = \{X \mid X \subseteq S^-, \partial^-\varphi(X) = f^-(X)\}$ が定まり，S^+, S^- の分割 $\Pi(\mathcal{D}^+)$, $\Pi(\mathcal{D}^-)$ の各成分である点集合を，G_φ において，それぞれ 1 点に収縮して得られる台グラフを $G'_\varphi = (V', A'_\varphi)$ とおく．また，両方向に残余容量を持つ枝の集合を $\hat{A}_\varphi = \{a \mid a \in A_\varphi, c_\varphi(a) > 0, c_\varphi(\bar{a}) > 0\}$ とし，通常の一般化フローのネットワーク $\hat{\mathcal{N}}_\varphi = ((V', A'_\varphi \cap \hat{A}_\varphi), c_\varphi, \gamma_\varphi, \alpha_\varphi)$ を定義する．

補題 3: φ が実行可能フロー多面体の端点であるための必要十分条件は，$\hat{\mathcal{N}}_\varphi$ 中に単位利得閉路も双閉路も存在しないことである．□

$\hat{\mathcal{N}}_\varphi$ 上で求めた単位利得閉路または双閉路をもとにして，$\mathcal{N}_\varphi$ 上のサーキットを求める（このとき，$\partial\varphi$ に関して，S^+, S^- の 3 点または 4 点上で一定の比で同時に交換できる容量を計算する必要が生じる）．このようにして得られたサーキットの消去を繰り返すことによって端点解が得られる．

定理 4: B^{-10m}-最適な一般化独立フローが与えられたとき，最適解が $\tilde{\mathrm{O}}(mn(m+n\eta))$ 時間で求められる．□

定理 5: 一般化最小費用独立フローが $\tilde{\mathrm{O}}((n^2+\eta)\, mn^5 \log B)$ 時間で求められる．□

参考文献

[1] S. Fujishige: *Submodular Functions and Optimization* (North-Holland, 1991).

[2] K. D. Wayne: *A polynomial combinatorial algorithm for generalized minimum cost flow*, Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1999), pp. 11-18.