ファジィ処理時間とファジィ納期をもつ一機械スケジューリング問題に対する可能性測度を用いた意思決定

02102914　広島大学大学院工学研究科　*片桐　英樹　KATAGIRI Hideki
02102665　広島大学大学院工学研究科　坂和　正敏　SAKAWA Masatoshi

1　はじめに

これまで，不確実性下での一機械スケジューリング問題に対して，仕事の処理時間が確率変数で与えられる場合などが考えられ，いくつかの研究がなされてきた [1]. 一方，近年になり人間の判断のあいまい性や値の不明確さを考慮に入れたモデルがファジィ理論に基づいて考えられ，一機械スケジューリング問題においても数多くの研究がなされている [2, 3]. 伊藤ら [4] は，仕事の納期と処理時間が共にあいまいである場合を扱い，可能性測度に基づいた納期遅れの概念を定義して納期遅れ仕事数を最小化する問題を解くアルゴリズムを提案している．

本研究では，処理時間と納期が共にあいまいである場合の一機械スケジューリング問題において，納期が満たされる可能性測度を最大化するスケジュールを求めることに焦点をあて，メンバシップ関数のレベル集合に対して EDD ルールを適用することによって問題を多項式時間で解くアルゴリズムを提案する．

2　定式化

処理すべき仕事を $J_1,\ldots,J_n$ とし，それぞれのジョブ J_i, $i=1,\ldots,n$ には線形メンバシップ関数 $\mu_{\tilde{P}^i}(s)$, $\mu_{\tilde{D}^i}(t)$, $i=1,\ldots,n$ で特性づけられるファジィ集合で表されるファジィ処理時間 $\tilde{P}^i$ およびファジィ納期 $\tilde{D}^i$ が与えられているとする．

$$\mu_{\tilde{P}^i}(t)=\begin{cases}\max\left\{0,\ 1-\dfrac{p_i-t}{\gamma_i}\right\}, & p_i\geq t\\ \max\left\{0,\ 1-\dfrac{t-p_i}{\delta_i}\right\}, & p_i\leq t\end{cases}\tag{1}$$

$$\mu_{\tilde{D}^i}(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t\leq d_i^1\\ 1-\dfrac{t-d_i^1}{d_i^0-d_i^1}, & d_i^1\leq t\leq d_i^0\\ 0, & t\geq d_i^0\end{cases}\tag{2}$$

ここで，p_i, γ_i, δ_i, d_i^0, d_i^1 は正の定数である．また，スケジュール S における J_i の完了処理時間を $\tilde{C}^i(S)$ で表し，そのメンバシップ関数を $\mu_{\tilde{C}^i(S)}$ で表すとする．このとき，ある仕事 J_i のファジィ納期 $\tilde{D}^i$ が満たされる可能性の度合いは次の可能性測度 $\Pi_{\tilde{C}^i(S)}(\tilde{D}^i)$ で与えられる．

$$\Pi_{\tilde{C}^i(S)}(\tilde{D}^i)=\sup_t\min\{\mu_{\tilde{C}^i(S)}(t),\ \mu_{\tilde{D}^i}(t)\}\tag{3}$$

したがって，ファジィ納期に間に合う可能性の最も低い仕事についてその可能性測度を最大化するスケジュールを求める問題は次のようになる．

$$\min_{1\leq i\leq n}\{\Pi_{\tilde{C}^i(S)}(\tilde{D}^i)\}\to\max\tag{4}$$

問題 (4) を解くための準備として，次のような α レベル納期 $\tilde{D}^i_\alpha$, α レベル処理時間 $\tilde{P}^i_\alpha$, α レベル完了時間 $\tilde{C}^i_\alpha(S)$ の概念を導入する．

$$\begin{aligned}\tilde{D}^i_\alpha&\triangleq\{t|\mu_{\tilde{D}^i}(t)\geq\alpha\}=[d_\alpha^{iL},d_\alpha^{iR}]\\ \tilde{P}^i_\alpha&\triangleq\{t|\mu_{\tilde{P}^i}(t)\geq\alpha\}=[p_\alpha^{iL},p_\alpha^{iR}]\\ \tilde{C}^i_\alpha(S)&\triangleq\{t|\mu_{\tilde{C}^i(S)}(t)\geq\alpha\}=[c_\alpha^{iL}(S),c_\alpha^{iR}(S)]\end{aligned}$$

ここで，d_α^{iL}, d_α^{iR} などは区間の左右の端点を表している．このとき，次の性質が成り立つ．

補題 1 任意の α に対して，$\min_{1\leq i\leq n}\{\Pi_{\tilde{C}^i(S)}(\tilde{D}^i)\}\geq\alpha$ を満たすスケジュールが存在するための必要十分条件は，全ての仕事 J_i, $i=1,\ldots,n$ について，$\tilde{C}^i_\alpha(S)\cap\tilde{D}^i_\alpha\neq\emptyset$ となるようなスケジュール S が存在することである．

さらにスケジュール S における仕事 J_i に対して α レベル納期ずれ $L_i^\alpha(S)$, および最大納期ずれ $L_{\max}^\alpha(S)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}L_i^\alpha(S)&\triangleq c_\alpha^{iL}(S)-d_\alpha^{iR}\\ L_{\max}^\alpha(S)&\triangleq\max\{L_i^\alpha(S)|i=1,\ldots,m\}\end{aligned}$$

任意のスケジュール S において，$L_i^\alpha(S)$ は α の単調増加関数であることは容易にわかるため，次の定理が成り立つことが示せる．

補題 2 任意の α に対して，$\min_{1\leq i\leq n}\{\Pi_{\tilde{C}^i(S)}(\tilde{D}^i)\}\geq\alpha$ となるスケジュールが存在するための必要十分条件は，$L_{\max}^\alpha(S)\leq 0$ となるスケジュール S が存在することである．

さらに次の性質が成り立つ．

性質 1 $L^{\alpha}_{\max}(S)$ を最小にするスケジュール $\hat{S}^{\alpha}$ は，処理時間を p^{iL}_{α} とし，納期を d^{iR}_{α} としたときの最大納期遅れ最小化問題に対する最適スケジュール，すなわち *EDD* ルールによって求まるスケジュールに等しい．

補題2と性質1を用いることにより，次の定理が導かれる．

定理 1 問題 *(4)* に対する最適値を α^* とするとき，次の関係式が成り立つ．

1. $\alpha^* > \alpha \Longleftrightarrow L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha}) < 0$
2. $\alpha^* = \alpha \Longleftrightarrow L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha}) = 0$
3. $\alpha^* < \alpha \Longleftrightarrow L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha}) > 0$

この定理により，最適スケジュールを得るためには，すべての $\alpha \in (0,1)$ についてEDDルールに従ってスケジュールを求め，$L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha}) = 0$ を満たすかどうかを調べればよいことがわかる．このとき，調べるべき α は無限個存在するが，次の作業を行うことによって有限個におさえることができる．まず，仕事 J_i と J_j のファジィ納期に対応するメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{D}i}(t)$, $\mu_{\tilde{D}j}(t)$ に関して狭義単調減少部分での交点の t 座標 t_{ij} と，そのメンバシップ関数値 α_{ij} を求める．さらに任意の2つの交点 $\alpha_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n (i > j)$ のうち，開区間 $(0,1)$ に存在するものを全て求めて小さい順に並べた結果を

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s < \alpha_{s+1} = 1$$

とする．ここで，開区間 $I_k \triangleq (\alpha_k,\ \alpha_{k+1}),\ k = 0, \ldots, s$ を定義すると，次の性質が成り立つことが容易にわかる．

性質 2 k を固定したとき，任意の $\beta \in I_k$ に対して，スケジュール $\hat{S}^{\beta}$ は一意に決まる．

上記の性質が成り立つことは，EDDルールが仕事の納期の早い順に並べる規則であることから明らかである．また $L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha})$ の α に関する狭義単調増加性は容易に示せるため，すべての $\alpha \in (0,1)$ について $L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha}) = 0$ であるかどうかを調べる必要はなく，せいぜい交点の数だけ調べればよいことがわかる．以上の議論により，最適スケジュールを求めるアルゴリズムは次のようになる．

[可能性測度を用いた一機械ファジィスケジューリング問題の解法]

手順 1: ファジィ納期を表すファジィ集合を特性付けるメンバシップ関数の任意の2つについて交点を求め，その交点におけるメンバシップ関数値を計算する．その値の集合を $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ とする．

手順 2: $\hat{S}^0$ を求める．$L^0_{\max}(\hat{S}^0) < 0$ ならば終了し，そうでなければ，手順3へ進む．

手順 3: $\hat{S}^1$ を求める．$L^1_{\max}(\hat{S}^1) > 0$ ならば最適スケジュールを得て終了する．そうでなければ，手順4へ進む．

手順 4: 集合 A の要素の中央値 α_m を求め，$\hat{S}^{\alpha_m}$ を求める．

手順 5: $L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha_m}) < 0$ ならば，α_m よりも小さい値を集合 A より取り除き，手順4へ戻る．$L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha_m}) = 0$ ならば求められたスケジュールが最適解となり，終了する．$L^{\alpha}_{\max}(\hat{S}^{\alpha_m}) > 0$ ならば α_m よりも大きい値を集合 A より取り除き，手順4へ戻る．

上記のアルゴリズムについて次の定理が成り立つ．

定理 2 可能性測度を用いた一機械ファジィスケジューリング問題を解くアルゴリズムの計算時間は，$O(n^2)$ である．

3 おわりに

本研究では，仕事の処理時間と納期が共にあいまいである場合の一機械スケジューリング問題を可能性測度の概念に基づいてモデル化した．さらに，あいまい性が存在する状況下で納期に間に合う可能性を最大化するスケジューリング問題と通常の最大納期ずれ最小化問題が密接に関わっていることを示し，EDDルールに基づいて最適スケジュールを求める多項式時間アルゴリズムを提案した．

ここではファジィ納期に間に合わない可能性を最小化する場合を扱ったが，意思決定者の多様な意思決定基準を考慮すれば，“納期に間に合う必然性を最大化” するモデルやあるいは “納期に間に合わない可能性を最小化” するモデルなども有用であると考えられる．

参考文献

[1] 木瀬洋，塩山忠義，確率スケジューリング問題について，オペレーションズリサーチ学会誌，**32**(11) (1987) 750–757.

[2] S. Han, H. Ishii and S. Fujii, One machine scheduling problem with fuzzy due date, *European Journal of Operations Research*, **79** (1994) 1–12.

[3] K. Tanaka and M. Vlach, Single machine scheduling with fuzzy due dates, *in: Proceedings of the 7th International Fuzzy Systems Association World Congress, IFSA '97*, **1** (1997) 30–35.

[4] T. Itoh, H. Ishii, Fuzzy due-date scheduling problem with fuzzy processing time, *International Transactions in Operational Research*, **6** (1999) 639–647.