階層的3機械フローショップ問題

02701774 神戸商科大学大学院 *柳井 秀三 YANAI Shuzo
01507034 神戸商科大学商経学部 藤江 哲也 FUJIE Tetsuya

1. はじめに

伝統的なスケジューリング問題では，1つの基準を最適にするようなジョブの加工順序を決定する．しかし，現場では多くの基準を最適にすることが望まれており，多基準最適化問題はスケジューリング分野においても古くから研究されている．一方，第一基準を最適にする加工順序の中で第二基準を最適にするものを見つけるという問題は階層的スケジューリング問題 (Hierarchical Scheduling Problem) として知られている．例えば，一定の稼働時間で無駄なく部品を製造し，かつ完成した部品を早く配送したいケースを考える．このときの第一基準は工場の稼働時間の最小化であり，第二基準は完成した部品をなるべく早く配送することである．

現在までに各種のスケジューリング問題に対して階層的スケジューリング問題が提案されている．[2] では，2機械フローショップ問題が扱われており，総所要時間最小の下で総滞留時間 (各ジョブの完了時刻の総和) の最小化を目的としている．本研究ではは，3機械フローショップ問題を扱う．目的は機械2における総所要時間が最小であるという制約の下で，機械3における基準を最適化することである．本稿では，問題のNP困難性を示し，厳密解法によるアプローチを行う．

2. モデル

本稿のモデルは以下に示すとおりである．
(1) ジョブ $J_i (i = 1, ..., n)$ が3台の機械 $M_m (m = 1, 2, 3)$ により加工される．(2) 各機械は同時に一つのジョブしか加工できず，ジョブの加工は中断できない．(3) ジョブ J_i の機械 M_m における加工時間を p_i^m とする．(4) 各ジョブは時刻0から加工が開始可能であり，最初に M_1，次に M_2，最後に M_3 で加工される．(5) スケジュールはジョブ集合 $\{1, ..., n\}$ の順列 $\pi = (\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n))$ である．

また，スケジュール π に対して次の基準を設定する．(a) ジョブ $J_{\pi(i)}$ の機械 M_m に対する完了時刻を $C_{\pi(i)}^m$ とし，$C_{\max}^m = \min_\pi C_{\pi(n)}^m$ とする．同時に，$C_{\max}^m$ を最小にする基準を $C_{\max}^m$ と書くことにする．(b)$\sum C_i^m$: 機械 m における各ジョブの完了時刻の総和 $\sum_{i=1}^n C_{\pi(i)}^m$ の最小化を基準とする．(c)$\sum D_i^m$: 機械 m において各ジョブが完了するまでにかかった総加工時間の総和 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i p_{\pi(j)}^m$ の最小化を基準とする．さらに，[2] にしたがい，本研究で扱う問題を $Fm||F_h(C2/C1)$ と表記する．ただし，Fm : m 機械フローショップ, $C1$: 第一基準， $C2$: 第二基準，である．本稿では次の問題を考える．

問題1 : $F3||F_h(\sum D_i^3/C_{\max}^2)$

問題2 : $F3||F_h(\sum C_i^3/C_{\max}^2)$

問題3 : $F2||F_h(\sum C_i^2/C_{\max}^2)$

問題3はNP困難であることが証明されている [2]．また，[1] の結果から次の事実が示される．

補題 1 問題1，問題2は共にNP困難である．

すなわち，上記の問題はすべてNP困難である．特に，$F3||\sum D_i^3$, $F3||C_{\max}^2$ は共に多項式時間で解ける [3] ものの，問題1はNP困難である．また，問題1は問題2および問題3の下界値を与えることから，本研究では問題1を取り上げることにする．

3. 分枝限定法

本節では，問題1に対する単純な下界値計算による分枝限定法を示す．

3.1 下界値

$C_{\max}^2$ 制約を除去すると，問題1は $F3||\sum D_i^3$ へと緩和される．この問題の最適解は M_3 における加工時間を非減少列で並べた順列であることが知られている．よって，$F3||\sum D_i^3$ の最適値 LB_0 は容易に計算することができる．

$\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(k))$ を，k 番目までの加工順序が定まっている部分スケジュールとする．また，σ に含まれないジョブに対して Johnson の解法 [3] を適用して得られた順列を $J_{\bar{\sigma}}$，M_3 における加工時間を非減少列で並べた順列を $S_{\bar{\sigma}}$ とする．さらに，$J[\sigma] = \sigma J_{\bar{\sigma}}$, $S[\sigma] = \sigma S_{\bar{\sigma}}$ とすると，

$$\mathrm{LB}_k = \min_{|\sigma|=k} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{i} p_{S[\sigma](\ell)}^3 \;\middle|\; C^2(J[\sigma]) = C_{\max}^2 \right\}$$

は問題1の下界値であり，$\mathrm{LB}_0 \le \mathrm{LB}_1 \le \cdots \le \mathrm{LB}_{n-2} \le \mathrm{LB}_{n-1} = \mathrm{LB}_n =$ 最適値 が成り立つ．ただし，LB_k の計算には k に関する指数時間かかる．

3.2 上界値

貪欲法により実行可能なスケジュールを生成する.

アルゴリズム 0.
Step1. $\sigma := \emptyset$, $t := 0$.
Step2. $i^* = \mathrm{argmin}\{p_i^3 | C^2(J[(\sigma, i)]) = C^2_{\max},\ i \notin \sigma\}$
Step3. $\sigma := (\sigma, i^*)$, $t := t+1$. もし $t = n$ ならば終了. そうでなければ Step2 へ.

Step2 において, i^* は必ず存在するため, このアルゴリズムは実行可能なスケジュールを出力する. また, 下界値のときの同様の議論によって上界値を強化することができる.

3.3 子問題と分枝方法

子問題は部分スケジュール $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(k))$ で表現する. また, (σ, i) $(i : i \notin \sigma)$ を新しい子問題として分枝する.

4. 定式化

前節の分枝限定法と比較するため, 本節では, 問題 1 の定式化を 3 通り与える. いずれもスケジュール π を「$\pi(i) = \ell \Leftrightarrow X_{i\ell} = 1$」として表現する 0-1 変数 $X = (X_{i\ell})$ を用いている. スケジュールを表現する X の集合を Ω とする. すなわち, e をすべての要素が 1 からなるベクトルとするとき, $\Omega = \{X \in \{0,1\}^{n \times n} \mid Xe = X^T e = e\}$ である.

4.1 定式化 (1)

C_i $(i = 1, \ldots, n)$ を, M_2 におけるジョブ $\pi(i)$ の完了時刻を表現する変数とする. このとき, 次のように定式化できる:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell^3 X_{j\ell} \\
\text{条　件} & \displaystyle C_1 = \sum_{\ell=1}^{n} (p_\ell^1 + p_\ell^2) X_{1\ell}, \\
& \displaystyle C_i \geq C_{i-1} + \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell^2 X_{i\ell} \quad (i = 2, \ldots, n), \\
& \displaystyle C_i \geq \sum_{j=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell^1 X_{j\ell} + \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell^2 X_{i\ell} \\
& \hfill (i = 2, \ldots, n), \\
& X \in \Omega.
\end{array}
$$

変数 C_i を用いているため, 目的関数を変更することによって問題 2, 問題 3 の定式化をすることができる.

4.2 定式化 (2)

任意の加工順序 π に対して $C^2_{\max}$ は

$$
C^2_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{i} p^1_{\pi(j)} + \sum_{j=i}^{n} p^2_{\pi(j)} \right\}
$$

として計算できることが知られている. したがって問題 1 は, 次のように X のみを用いて定式化することができる:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell^3 X_{j\ell} \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell^1 X_{j\ell} + \sum_{j=i}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell^2 X_{j\ell} \leq C^2_{\max} \\
& \hfill (i = 1, 2, \ldots, n), \\
& X \in \Omega.
\end{array}
$$

4.3 定式化 (3)

$\sigma' = (\sigma(1), \ldots, \sigma(k-1))$ について $C^2(J[\sigma']) = C^2_{\max}$ であるが, $C^2(J[\sigma]) > C^2_{\max}$ であるような部分スケジュール σ の集合を $\mathcal{J}$ と定義する. このとき, 問題 1 は次のように定式化できる:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell^3 X_{j\ell} \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{|\sigma|} X_{i\sigma(i)} \leq |\sigma| - 1 \quad (\sigma \in \mathcal{J}), \\
& X \in \Omega.
\end{array}
$$

5. 数値実験

問題 1 に対して分枝限定法を実装し, また, 提案した定式化に基づく解法と比較した. また, 問題 2, 問題 3 への適用を現在検討している. 実験結果の詳細は, 紙面の都合上当日発表させて頂く.

参考文献

[1] M. R. Garey, D. S. Johnson and T. Sethi, "The Complexity of Flowshop and Jobshop Scheduling," *Mathematics of Operations Research* 1 (1976) 117–129.

[2] J. N. D. Gupta, V. R. Neppalli and F. Werner, "Minimizing Total Flow Time in a Two-machine Flowshop Problem with Minimum Makespan," *International Journal of Production Economics* 69 (2000) 323–338.

[3] S. M. Johnson, "Optimal Two- and Three-stage Production Schedules with Set-up Times Included," *Naval Research Logistics Quarterly* 1 (1954) 61–68.