# ＡＨＰ不完全情報の推定と補正

01404360　日本大学　西澤一友　NISHIZAWA Kazutomo

## 1　はじめに

不完全情報でのAHP (Analytic Hierarchy Process) では、その手法として代表的なものはHarker法やTwo-Stage法である。Harker法は直接ウエイトを推定する方法であり、Two-Stage法は欠落した要素を推定し、ウエイトを求める方法である。前回、Two-Stage法を改良した推定方法[1]を提案し、その結果がHarker法とほぼ一致することを示した。しかし、提案した手法も含め、これらの手法では一対比較要素について、実際の一対比較結果と推定した結果を同等として扱っている。

そこで、本報告では前回提案した推定方法について、推定結果を補正する方法を追加し、適用例で評価を行う。

## 2　欠落要素の推定方法

不完全一対比較行列$A_0$の要素を$a_{ij}$ $(i=1\sim n,\ j=1\sim n)$とし、$a_{ij}$が欠落のとき次式により$a_{ij}$を推定する。

$$a_{ij}=(\prod_{k=1}^{n}a_{kj}/a_{ki})^{1/m} \qquad (1)$$

式(1)で、欠落要素を含む$a_{kj}/a_{ki}$の項の値は1とし、$m$は欠落要素を含まない項の数として計算する。すなわち$k=1\sim n$について欠落要素を含まない$m$個の$a_{kj}/a_{ki}$で幾何平均をとる。さらに、推定で得られた要素も加えて欠落要素がなくなるまで推定を繰り返す。

その結果、$l$回の推定繰り返しですべての欠落要素を推定できたとする。もちろん0回目の要素は実際に行われた一対比較の結果である。ここで、0回目の結果と$l$回目の結果にはウエイトを付けるのが自然と考える。そこで、バイナリAHPにより0回目から$l$回目の補正ウエイトを決定する。

一般に$l$回目ですべての欠落要素の推定が完了した場合、バイナリAHPの一対比較行列$B$の要素は以下のようになる。ただし、$\theta$は正のパラメータである。

$$b_{ij}=\theta(i<j),\quad b_{ji}=1/b_{ij},\quad b_{ii}=1$$
$$(i=0\sim l,\ j=0\sim l)$$

$B$より簡易的に幾何平均で補正ウエイト$p_k(k=0\sim l)$を求めると次式となる。

$$p_k=\theta^{(l-2k)/(l+1)} \qquad (k=0\sim l)$$

しかし、$l$回目のウエイトを下げる操作をすると、補正結果が1より小さくなり、優劣の判定が逆転してしまう可能性がある。そこで、$l$回目のウエイトを1に、すなわち$p_l=1$に正規化すると式 (2) のようになる。

$$p_k=\theta^{2(l-k)/(l+1)} \qquad (k=0\sim l) \qquad (2)$$

$k$を$a_{ij}$の推定回数とすると、補正を加えた一対比較行列$\overline{A}$の要素$\overline{a_{ij}}$を以下のようにする。

$$\begin{aligned}\overline{a_{ij}} &= a_{ij}\times p_k \quad (a_{ij}>1)\\ \overline{a_{ij}} &= 1 \quad (a_{ij}=1)\\ \overline{a_{ij}} &= a_{ij}/p_k \quad (a_{ij}<1)\end{aligned} \qquad (3)$$

## 3　適用例と評価

提案した推定・補正方法をスポーツのトーナメント戦に適用し、全参加チームの順位を推定し実際の結果と比較して評価を行う。

参加チーム数を$n$としたとき、チーム$i$とチーム$j$の対戦結果、すなわち一対比較行列の要素$a_{ij}$は以下のようにする[2]。

$$a_{ij}=\theta^{f_{ij}} \qquad (4)$$

ただし、$f_{ij}=$ (チーム$i$の得点-チーム$j$の得点) / (チーム$i$の得点+チーム$j$の得点) とし$\theta=2$で計算する。

### 3.1　適用例１　(４チームトーナメント)

まず、4チームでのトーナメント例を図1に示す。

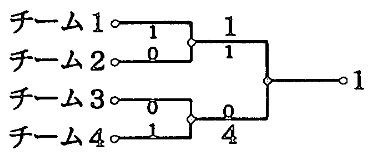


図 1: 4チームトーナメント例

式(4)では、図1のようにすべての対戦結果を1-0とするとバイナリAHPとなる。その不完全一対比較行列を式(5)に示す。ここで () は欠落を表す。

$$A_o = \begin{bmatrix} 1 & \theta & () & \theta \\ 1/\theta & 1 & () & () \\ () & () & 1 & 1/\theta \\ 1/\theta & () & \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

欠落を推定した結果、式(6)となった。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \theta \\ 1/\theta & 1 & \theta & 1 \\ 1/\theta^2 & 1/\theta & 1 & 1/\theta \\ 1/\theta & 1 & \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

パワー法で、各ベクトルの誤差の絶対値が$10^{-6}$以内を収束判定とすると、結果は表1となり、チーム2とチーム4は同じ評価となった。Harker法でも同じ結果となった。

表 1: 通常の推定ウエイト

| | |
|---|---|
| チーム1 | 0.444442 |
| チーム2 | 0.222217 |
| チーム3 | 0.111115 |
| チーム4 | 0.222226 |

欠落要素の推定の回数を式(7)の上三角要素に示す。ここでは2回目の推定ですべての欠落が補われた。

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 1 & 0 \\ & * & 2 & 1 \\ & & * & 0 \\ & & & * \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(2)で$l = 2$として補正ウエイトを求めると表2となり、補正された一対比較行列は式(8)のようになった。

表 2: 適用例1の補正ウエイト

| $k$ | $p_k$ |
|---|---|
| 0 | 2.519842 |
| 1 | 1.587400 |
| 2 | 1.000000 |

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1.00000 & 5.03968 & 6.34960 & 5.03968 \\ 0.19842 & 1.00000 & 2.00000 & 1.00000 \\ 0.15749 & 0.50000 & 1.00000 & 0.19842 \\ 0.19842 & 1.00000 & 5.03968 & 1.00000 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(8)より得られたウエイトを表3に示す。

表 3: 補正された推定ウエイト

| | |
|---|---|
| チーム1 | 0.622211 |
| チーム2 | 0.134579 |
| チーム3 | 0.062974 |
| チーム4 | 0.180236 |

### 3.2 適用例2（2000年春の選抜大会）

次の例として2000年春の選抜大会に適用する。提案した方法により一対比較行列の欠落は4回の繰り返しですべて推定できた。結果を表4に示す。補正により1試合で上位に評価されていたチームの順位が下がった。

表 4: 2000年春の選抜大会適用結果

| | 推定順位 | | 試合数 | 補正推定順位 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 常総学院 | 優勝 | 5 | 常総学院 |
| 2 | 南部 | 2回戦敗退 | 1 | 仙台育英 |
| 3 | 仙台育英 | 決勝敗退 | 5 | 南部 |
| 4 | 海星 | 2回戦敗退 | 1 | 海星 |
| 5 | 関西創価 | 準決勝敗退 | 4 | 関西創価 |

## 4 まとめ

不完全情報の手法として、Two-Stage法を改良した推定方法と補正方法を提案し適用例を示した。

## 参考文献

[1] 西澤一友：不完全情報における欠落要素の推定、日本OR学会2001年度春季研究発表会、pp246-247.

[2] 木下栄蔵編：AHPの理論と実際、日科技連、(2000)、pp218-219.