不動産価格変動モデルの構築とリバースモーゲージの価格評価

01106850 京都大学 木島 正明 KIJIMA Masaaki
01110340 興銀第一 FT 小守林 克哉 KOMORIBAYASHI Katsuya
興銀第一 FT 阿久津 なぎさ AKUTSU Nagisa

1 はじめに

本研究では，不動産の価格データをもとに価格変動のモデル化を試みる．具体的には財団法人日本不動産研究所の発表している全国市街地価格指数をもとに，1955年9月から2000年9月までの半期データを使用して，ノンパラメトリック推定を行い不動産価格の変動モデルを構築する．さらにこのモデルを用いたアプリケーションとしてリバースモーゲージ商品の価格評価を行う．

2 不動産の価格変動モデル

不動産のリターンを R と表現し，R が以下のようなプロセスに従うものと仮定する．

$$dR = \mu(R,t)dt + \sigma(R,t)dz_1 \tag{1}$$

ただし，z は標準ウィナープロセスを表す．(1) 式に対して $\mu(R,t)$ および $\sigma(R,t)$ をノンパラメトリック推定手法の1つであるカーネル推定を用いて表現する．これは，次のように表現される [4]．

$$\mu = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{R_{t_{i+1}} - R_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} w_i(R) \tag{2}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{R_{t_{i+1}} - R_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} - \mu(R) \right)^2 w_i(R) \tag{3}$$

ただし，$w_i(R)$ は次のように定義される．

$$w_i(R) = \frac{K\left(\frac{R - R_{t_i}}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{R - R_{t_i}}{h}\right)} \tag{4}$$

ここで，$K(\cdot)$ はカーネル関数で，今回の推定では次式で定義されるようなガウスカーネルを用いた．

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} \tag{5}$$

このような方法で推計した μ 関数と σ 関数は次の図の通りである．これらの図より，不動産のリ

図 1: μ 関数

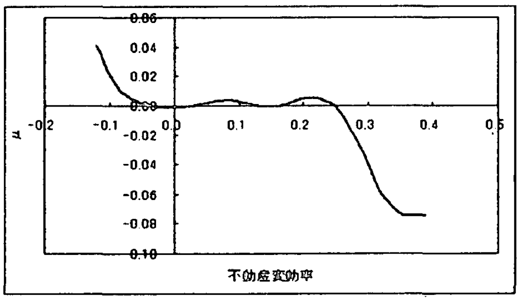
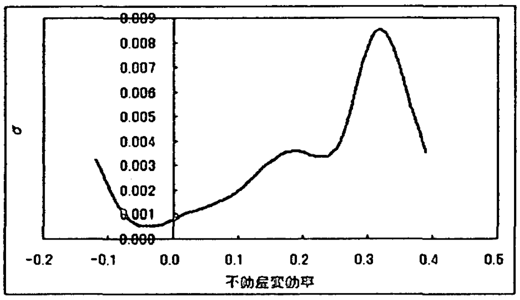


図 2: σ 関数



ターンは，その水準が −10% から 25% 程度の水準にあるときはランダムウォークであるが，それ以外の範囲になると中心回帰性をもつことなどが分かる．

3 リバース・モーゲージ商品の価格評価

リバース・モーゲージとは不動産を担保にして融資を行う商品である．このような商品は，融資金額の設定方法などにいくつかのバリエーションがあるが，本研究ではこれらのうち，最も単純な契約形態を取り上げる [2]．現時点を t_0 として，契約の満期時点を $T = t_n$ とする．融資は満

期，または契約者が死亡するまで満期までの各年 $t_i(i=0,\cdots,n-1)$ の年初に金額 B_i が支払われるものとする．契約が満了すると清算が行われ，契約者は過去に支払われた融資額と融資コストの合計額に金利利息を加えた清算金額と，担保不動産価値の小さい額を支払うような契約を考える．このとき金融機関の支払キャッシュフローの割引現在価値を P_F，受取りキャッシュフローを P_R と表現すると，

$$P_F = \tilde{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\int_0^{t_i} r(u)du} \cdot B_i \cdot 1_{\{t_i<\hat{t}\}}\right] \qquad (6)$$

$$P_R = \tilde{E}\left[e^{-\int_0^{\hat{t}} r(u)du} \cdot \min[L(\hat{t}), G(\hat{t})]\right] \qquad (7)$$

ここで，$r(t)$ は無リスク金利，$\hat{t}$ は清算時点を表し，契約者の死亡時点 τ を用いて $\hat{t}=(\tau \wedge T)$ と表される．また，$G(t)$ は担保不動産の時点 t における価値，$L(t)$ は時点 t で清算を行う場合の想定清算金で過去の融資総額の清算時点の価値として次のように定義される．

$$L(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[e^{\int_{t_i}^{t} r(u)du} \cdot (B_i(1+\alpha)) \cdot 1_{\{t_i<t\}}\right] \qquad (8)$$

(8) 式において，α は契約者が融資を受ける場合のコスト，すなわち金融機関の収益を表す．

4 数値計算

以上のような設定のもとで，P_F と P_R が等しくなるような融資コストをシミュレーションを用いて推計する．不動産のリターンは (1) 式に従うものとし，一方，金利については次式のような CIR モデルを用いてシミュレーションを実施した．

$$dr(t) = c(m-r)dt + \sigma_r\sqrt{r}dz_2 \qquad (9)$$

パラメータとして，$c=0.04197$, $m=0.04308$, $\sigma_r=0.04639$ とし [3]，不動産と金利の相関は $\rho=0.2$ とした．このとき，表 1 に示すようなリバース・モーゲージ商品について，10000 回のシミュレーションにより，α の水準により融資額がどのように変化するかを計算した結果が図 3 である．

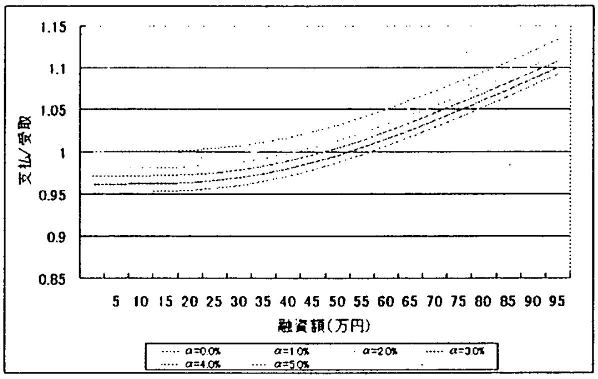
表 1: リバース・モーゲージの商品設定

現在の担保不動産価値 $G(t_0)$	4,000 万円
現在の金利 $r(t_0)$	2.0%
契約の満期 T	20 年
死亡率	1.0% （一定）

尚，(6),(7) 式の評価のためには，(1),(9) 式を次のようにリスク調整する必要があるが [1]，今回の計算ではリスクプレミアムは時間によらず，$\lambda_R(t)=0, \lambda_r(t)=0$ とした．

$$dR = (\mu(R,t) - \sigma(R,t)\lambda_R(t))\,dt + \sigma(R,t)d\tilde{z}_1$$
$$dr = c\left(m - \frac{\sigma\sqrt{r}}{c}\lambda_r(t) - r\right)dt + \sigma_r\sqrt{r}d\tilde{z}_2$$

図 3: コストと融資額の関係



この他の計算結果については当日紹介する．

参考文献

[1] 木島正明 (1999)，期間構造モデルと金利デリバティブ

[2] 青沼君明，村内佳子 (2000)，「リバース・モーゲージの評価モデル」，応用数理学会論文誌，第 10 巻 3 号，187-198.

[3] 小守林，星野，原田，飯田 (1995)，「日本国債市場における金利リスクプレミアムの推定」，日本ＯＲ学会春季大会アブストラクト集

[4] James, J. and N. Webber (2000), *Interest rate modelling*, Wiley.