2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

債権回収確率を考慮したリスクマージン利回り

01014433 金城学院大学 ＊荒深 美和子 ARAFUKA Miwako
01402793 名古屋銀行 中村 正治 NAKAMURA Syouji
01204194 流通科学大学 三道 弘明 SANDOH Hiroaki
01400043 愛知工業大学 中川 覃夫 NAKAGAWA Toshio

1．はじめに

銀行は，融資した企業が倒産すると融資した資金を回収しなければならない．倒産後の債権回収には回収費用が必要となり，しかも債権を完全に回収できるとは限らない．本研究では，倒産後に回収可能な債権額が決定され，それが債権回収手続きによって回収され，その場合一括に債権が回収されるとする．倒産は倒産確率によって発生し，その後の債権回収は債権回収確率によって回収されるとする．このような状況において，倒産確率と債権回収確率が与えられる場合，倒産に伴う損失と倒産後の債権回収費用を見込んで銀行が収益を得るための，融資利率をどれくらいに設定するかの確率モデルを提示する．

2．モデル

銀行が融資期間を定めて融資した企業が期間途中で倒産した場合，倒産後の融資元利金の回収は債権回収確率に基づいて回収されるとし，債権額は一括に全額回収されると仮定する．このような状態において，銀行が損失のないように融資利率を求める場合，基準となる預金利回りに対して，倒産によるリスクとそれに伴う債権回収費用，それに加えて利益を上乗せしたスプレド利回りを決定するモデルを考える．

ここで，記号として，

M_1：預金額

M_2：融資額，ここでは，運用資金の調達を預金とし，一般的には $M_2 < M_1$ で，預貸率 $M_2/M_1 = \omega < 1$ の上限が決められている．

$r_D(t)$：預金利回．連続時間瞬間スポットレートとする．時間幅が微小のとき，時点 u での微小区間 $(u,u+du)$ のスポットレートを連続時間瞬間スポットレートといい，$r_1(u)$ で示す[1]．

$r_N(t)$：融資利回り，預金利回にある一定のスプレッドを加えた値とする．倒産が発生しない場合． $r_N(t)=r_D(t)+\alpha_N$

α_N：倒産がない場合のマージン利回．

$r_F(t)$：融資利回り，預金利回にある一定のマージンを加えた値とする．倒産が発生する場合 $r_F(t)=r_D(t)+\alpha_F$

α_F：倒産がある場合のマージン利回

β：融資額に対する倒産額の割合．$(0 \leqq \beta \leqq 1)$

δ：倒産額のうち貸し倒れの割合．$(0 \leqq \delta \leqq 1)$

λ：融資額のうち回収可能割合．

c_1：単位当り債権回収費用．

$F(t)$，$f(t)$：倒産確率分布，倒産確率密度．

$Z(t)$，$z(t)$：債権回収確率分布，債権回収確率密度．

とする．

2．1 倒産がない場合の期待収益

t 時点の預金利回りを連続時間瞬間スポット・レート $r_D(t)$，0時点の元金 M_1 は T 時点までの $(0,T]$ 期間預金しておくと，時刻 T における預金元金 M_1 の価値 $S_D(0,T)$ は，

$$S_D(0,T)=M_1\, exp\{\textstyle\int_0^T r_D(x)dx\} \tag{1}$$

となる．同様に，0時点で融資した元金 M_2 の時刻 T で回収すべき元利金額 $S_L(0,T)$ は，

$$S_L(0,T)=M_2\, exp\{\textstyle\int_0^T (r_D(x)+\alpha_N)dx\} \tag{2}$$

となる．ただし，定数 α_N は預金の利回りに収益を見込んだ上乗せ部分の利回り（無リスクマージン利回り）とする．

したがって，$(0,T]$ 期間の銀行の収益 $P_N(0,T)$ は，

$$P_N(0,T)=S_L(0,T)-S_D(0,T) \tag{3}$$

となる．預貸率（預金と融資の比率）が $M_2/M_1=\omega<1$ の場合，

$$\begin{aligned} P_N(0,T) &= M_1\{\omega\, exp\{\textstyle\int_0^T (r_D(x)+\alpha_N)dx\} - exp\{\int_0^T r_D(x)dx\}\} \\ &= M_1 exp\{\textstyle\int_0^T r_D(x)dx\}\{\omega\, exp\{\alpha_N\}-1\} \end{aligned} \tag{4}$$

となり，$(0,T]$ 期間で $P_N(0,T) \geqq 0$ となる α_N を決定することができる．

2．2 倒産を考慮した場合の期待収益1

$(0,T]$ 期間で倒産の発生は1回のみで，その倒産確率は $F(T)$ とし，倒産が発生した場合，倒産した時点で融資額全体に対する λ の割合だけ債権の回収ができると仮定する．すなわち，貸し倒れが融資額の何割か発生する．0時点で融資した元利金の時刻 T で回収できる額 $S_F(0,T)$ は，

$$\begin{aligned} S_F(0,T) &= M_2\, \overline{F}(T) \exp\{\textstyle\int_0^T (r_D(x)+\alpha_F)dx\} \\ &\quad + \lambda M_2 \int_o^T \exp\{\textstyle\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\} dF(t_0) \end{aligned} \tag{5}$$

となる．ただし，定数 α_F は預金の利回りに対して倒産による損失部分を収益面でカーバし，さらに，収益を見込んだスプレド利回りとする．

したがって，$(0,T]$期間の銀行の収益 $P_F(0,T)$は

$$
\begin{aligned}
P_F(0,T) &= S_F(0,T)-S_D(0,T)\\
&= M_1\ \{\omega\ \bar{F}(T)\exp\{\textstyle\int_0^T (r_D(x)+\alpha_F)dx\}\\
&\quad +\lambda\ \omega \int_0^T \exp\{\textstyle\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\}dF(t_0)\\
&\quad - exp\{\textstyle\int_0^T r_D(x)dx\}\}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

となり，銀行の収益 $P_F(0,T)>0$ となる α_F を決定することができる．

2.3 倒産を考慮した場合の期待収益2

倒産が時刻 t_0 $(0\leqq t_0 \leqq T)$で発生し，融資全体の λ 割合を回収対象額とする．また，その債権は債権回収確率 $z(t)dt$ に従って回収されると仮定する．すなわち，債権の回収をあきらめる場合がある．債権が債権回収事務手続きには，単位時間当たり c_1 の費用を必要とする．倒産時点 t_0から T までの債権回収額は $\int_{t_0}^{T} \lambda M_2 exp\{\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\}z(u)du$ で表される．時刻 t_0 で倒産し，債権回収をその後 t 時点まで行った場合の期待収益 $Q(t|t_0)$は，

$$
\begin{aligned}
Q(t|t_0) &= \int_{t_0}^{t} [\lambda M_2 exp\{\textstyle\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\} - c_1(u-t_0)]z(u-t_0)du\\
&\quad - c_1(t-t_0)\,[1-\int_{t_0}^{t} z(u-t_0)du]\\
&= \lambda M_2 exp\{\textstyle\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\}Z(t-t_0) - c_1\int_0^{t-t_0} \bar{Z}(u)du
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

で表わされる[1]．ただし，$\bar{Z}(t)=1-Z(t)$．$Q(t)$を最大にする $t^*(t^*\geqq t_0)$を求めるため，$Q(t)$を微分して，0とおくと，

$$Q'(t)=\lambda M_2 exp\{\textstyle\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\}z(t-t_0)-c_1\bar{Z}(t-t_0)=0 \qquad (8)$$

ゆえに，

$$z(t-t_0)/\bar{Z}(t-t_0)= c_1/(\lambda M_2 exp\{\textstyle\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\})\ (t\geqq t_0) \qquad (9)$$

いま，$Z(t)$の瞬間回収率を $\gamma(t)\equiv z(t)/\bar{Z}(t)$とおく．$\gamma(t)$が単調減少関数，すなわち，回収率は時間とともに悪くなるとする．$Q(t)$を最大にする $t^*(t_0\leqq t^*\leqq\infty)$は以下のように求められる．

(i) $\gamma(0)>c_1/(\lambda M_2 exp\{\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\})>\gamma(\infty)$ならば，(9)式を満たす有限で唯一の $t^*(t_0\leqq t^*\leqq\infty)$が存在する．

(ii) $\gamma(0)\leqq c_1/(\lambda M_2 exp\{\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\})$ならば，$t^*=t_0$ であり，回収はしない方がよい．

(iii) $\gamma(\infty)\geqq c_1/(\lambda M_2 exp\{\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\})$ならば，$t^*=\infty$であり，いつまでも回収続ける．

わが国では過去の倒産企業の債権回収率を推定することが可能となるほどの，十分なデータが存在しないので[4]，ここでは，債権回収確率分布として，ワイブル分布を仮定すると，$\gamma(t)\equiv\lambda mt^{m-1}(0<m<1)$，$\gamma(0)=\infty$，$\gamma(\infty)=0$ であり，t^*は

$$t^*-t_0=\left[\frac{c_1}{\lambda M_2 \lambda m}\exp\{-\textstyle\int_0^{t_0}(r_D(x)+\alpha_F)dx\}\right]^{1/(m-1)} \qquad (10)$$

となる．ここで，預金の満期期日より最適債権回収打ち切り時点 t^*と T の関係が，$t^*<T$ の場合は，回収資金の再運用となり，$t^*>T$ の場合は資金の調達となる．再運用および調達の利率はリスクのない預金利率と同じ利率を適用すると考える．倒産が t_0時点で起きた場合の T時点の $Q(T|t_0)$の価値は次式で表される．

$$
Q(T|t_0)=
\begin{cases}
Q(t^*|t_0)\ exp\{\int_{t^*}^{T} r_D(x)dx\} & if \quad T\geqq t^*\\
Q(t^*|t_0)\ exp\{-\int_{T}^{t^*} r_D(x)dx\} & if \quad T<t^*
\end{cases}
\qquad (11)
$$

2.4 債権回収を考慮した場合の期待収益

したがって，t_0時点で倒産があった場合の T 時点の総期待収益 $P_F(T|t_0)$ $(if \quad T\geqq t^*)$は，

$$
\begin{aligned}
P_F(T|t_0) &= Q(T|t_0)-M_1 exp\{\textstyle\int_0^T r_D(x)dx\}\\
&= -M_1 exp\{\textstyle\int_0^T r_D(x)dx\}+[\lambda M_2 exp\{\int_0^{t_0} (r_D(x)+\alpha_F)dx\}Z(t^*-t_0)\\
&\quad - c_1\int_0^{t^*-t_0} \bar{Z}(u)du\ ]exp\{\textstyle\int_{t^*}^{T} r_D(x)dx\}\ .
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

融資期間を T とした場合の銀行の期待収益を，時刻 T 時点の価値で表わした $P(T)$は

$$P(T)=P_N(T)\bar{F}(T)+\int_0^T P_F(T|t_0)dF(t_0) \qquad (13)$$

となり，倒産が$[0,T]$のいかなる時点 t_0 で発生しても $P(T)\geqq 0$ となるための融資利率 α_F を求めることができる．

3. 数値計算

当日発表

4. 結論

本研究では，銀行の信用リスク管理技術として，倒産と債権回収に見込まれる損失を定量的に評価する確率モデルを提案し，その対価の上乗せ部分としてのリスクマージン利回について，解析的または数値的に議論した．

[参考文献]

[1]北海道拓殖銀行調査部訳，銀行のオペレーションズ・リサーチ,日本評論社，1967 年，pp175～199

[2]Robert Jarrow & Stuart Turnbull, *Derivative Securities*, Thomson Learning Company, 1996

[3]Barlow,R.E.and Proschan,F, *Mathematical theory of reliability*, Wiley,New York, 1965

[4]西田真二，ＡＬＭ手法の新展開，日本経済新聞社 1995 年，pp175～199