凸多面ゲージを用いた多目的配置問題の有効解

01110072　弘前大学　*金 正道　KON Masamichi
01101363　福井工業大学　久志本 茂　KUSHIMOTO Shigeru

1. はじめに

すべて $\|\cdot\|$ で定義されるユークリッドノルムと $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で定義される標準内積をもつ $\mathbb{R}^2$ で考える。$\mathbb{R}^2$ に需要点が与えられたとき、新たに単一の施設を配置しようとする問題は単一施設配置問題とよばれる。この問題は通常、施設と需要点の間の距離を含む単一の目的関数をもつ最小化問題として定式化される。$d_i \in \mathbb{R}^2, i \in M \equiv \{1,2,\cdots,m\}$ を $m(\geq 2)$ 個の異なる需要点とし、$\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ をミンコフスキーの意味でのゲージとする。また、$x \in \mathbb{R}^2$ を施設の位置を表す変数とし、$D \equiv \{d_1, d_2, \cdots, d_m\}$ とする。このとき多目的配置問題は次のように定式化される。

$$\text{(P)} \quad \min_{x\in\mathbb{R}^2} (\gamma(x-d_1), \gamma(x-d_2), \cdots, \gamma(x-d_m))^T$$

問題 (P) の有効解を求めることを考える。点 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ が (P) の有効解であるとはすべての $i \in M$ に対して $\gamma(x-d_i) \leq \gamma(x_0-d_i)$ かつある $\ell \in M$ に対して $\gamma(x-d_\ell) < \gamma(x_0-d_\ell)$ となるような $x \in \mathbb{R}^2$ が存在しないときをいう。また、(P) のすべての有効解の集合を $E(D)$ とする。有効解の定義と後述の γ の定義より $D \subset E(D)$ である。凸多面ゲージを用いた多目的配置問題 (P) に対して (P) のすべての有効解を求める手続きが [2] において与えられている。

本稿では、$\mathbb{R}^2$ における凸多面ゲージを用いた多目的配置問題 (P) を考え、(P) の有効解の性質に関するいくつかの結果を与え、(P) のすべての有効解を効率的に求めるアルゴリズムを提案する。

2. 準備

ミンコフスキーの意味でのゲージ $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $\gamma(x) \equiv \inf\{\mu > 0 : x \in \mu B\}$ と定義される。ここで $B \subset \mathbb{R}^2$ は原点をその内部に含む有界閉凸集合である。$x, y \in \mathbb{R}^2$ に対して y から x への距離を $\gamma(x-y)$ と定義する。集合 $B^\circ = \{p \in \mathbb{R}^2 : \langle p, x\rangle \leq 1, \forall x \in B\}$ は B の極とよばれる。B が原点をその内部に含む有界閉凸集合ならば B° も原点をその内部に含む有界閉凸集合であり、$B^{\circ\circ} = B$ となる [3]。ゲージ γ は B がポリトープであるとき凸多面とよばれる。本稿を通して以下では、ゲージとして凸多面ゲージ、すなわち B がポリトープの場合を考え、B の端点の集合を Ext (B) と定義し、$e \in$ Ext (B) ならばある $\mu > 0$ に対して $-\mu e \in$ Ext (B) であることを仮定する。

$$\mathrm{Ext}(B) = \{e_1, e_2, \cdots, e_{2r}\}$$

とする。ここで $e_j = \|e_j\| (\cos\theta_j, \sin\theta_j)^T$, $j \in \{1, 2, \cdots, 2r\}$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_r < \pi \leq \theta_{r+1} < \cdots < \theta_{2r} < 2\pi$ であると仮定する。また、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $e_{2nr+j} \equiv e_j$, $j \in \{1, 2, \cdots, 2r\}$ とする。ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である。各 $j \in \{1,2,\cdots,2r\}$ と各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} K_{2nr+j} &\equiv \mathcal{C}\{e_{2nr+j}, e_{2nr+j+1}\} \\ L_{2nr+j} &\equiv K_{2nr+j-1} \cap K_{2nr+j} \\ p_{2nr+j} &\equiv \tfrac{1}{e_j^1 e_{j+1}^2 - e_j^2 e_{j+1}^1}(e_{j+1}^2 - e_j^2, e_j^1 - e_{j+1}^1)^T \end{aligned}$$

とする。ここで $\mathcal{C}\{e_{2nr+j}, e_{2nr+j+1}\} \equiv \{\lambda e_{2nr+j} + \mu e_{2nr+j+1} : \lambda, \mu \geq 0\}$, $e_j \equiv (e_j^1, e_j^2)^T$, $e_{j+1} \equiv (e_{j+1}^1, e_{j+1}^2)^T$ である。また

$$L \equiv \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{2r} (\{d_i\} + L_j)$$

とする。int (A), bd (A), co (A) によって集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ の内部，境界，凸包を定義し、ri (C) で凸集合 $C \subset \mathbb{R}^2$ の相対的内部を定義する。[1, Theorem 9.1, pp.57-58] より

$$\begin{aligned} B^\circ &= \textstyle\bigcap_{i=1}^{2r} \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle e_i, x\rangle \leq 1\} \\ &= \mathrm{co}(\{p_1, p_2, \cdots, p_{2r}\}) \\ \mathrm{Ext}(B^\circ) &= \{p_1, p_2, \cdots, p_{2r}\} \\ \mathrm{bd}(B^\circ) &= \textstyle\bigcup_{j=1}^{2r} [p_j, p_{j+1}] \end{aligned}$$

となることがわかる。ここで $[p_j, p_{j+1}] \equiv \{\mu p_j + (1-\mu)p_{j+1} : 0 \leq \mu \leq 1\}$ である。さらに

$$\partial\gamma(0) = \mathrm{co}(\{p_1, p_2, \cdots, p_{2r}\})$$

であり、各 $j \in \{1,2,\cdots,2r\}$ と各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial\gamma(x) = \begin{cases} \{p_{2nr+j}\} & \text{if } x \in \mathrm{int}(K_{2nr+j}) \\ [p_{2nr+j-1}, p_{2nr+j}] & \text{if } x \in L_{2nr+j} \setminus \{0\} \end{cases}$$

となることがわかる。ここで $\partial\gamma(\boldsymbol{x})$ は γ の $\boldsymbol{x}$ での劣微分である。

3. [2] の主な結果

$\mathbb{R}^2$ の空でない集合の族 $\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ は原点を含むある超平面が存在してその対応する 1 つの閉半空間がすべての C_i を含み、少なくとも 1 つの C_ℓ はその対応する 1 つの開半空間に含まれるとき族 $\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ は**適当な半空間に含まれる**とよばれる。点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) \equiv \{\partial\gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_1), \partial\gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_2), \cdots, \partial\gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_m)\}$$

とする。

定理 1　集合 $E(D)$ は $\Gamma(\boldsymbol{x})$ が適当な半空間に含まれないようなすべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の集合である。

集合 $C \subset \mathbb{R}^2$ が D とゲージ γ に関する**基本的凸集合**であるとは C が空でない閉凸集合であり $C = \bigcap_{i=1}^{m}(\{\boldsymbol{d}_i\} + N(\boldsymbol{q}_i))$ の形で表せるものである。ここで各 $i \in M$ に対して $\boldsymbol{q}_i$ は B° の点であり、各 $j \in \{1, 2, \cdots, 2r\}$ と各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$N(\boldsymbol{p}) = \begin{cases} K_{2nr+j} & \text{if } \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{2nr+j} \\ L_{2nr+j+1} & \text{if } \boldsymbol{p} \in \mathrm{ri}([\boldsymbol{p}_{2nr+j}, \boldsymbol{p}_{2nr+j+1}]) \\ \{0\} & \text{if } \boldsymbol{p} \in \mathrm{int}(B^\circ) \end{cases}$$

である。各 $\boldsymbol{x} \in C$ に対して $\boldsymbol{q}_i \in \partial\gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i)$ を得る。

系 1　C が基本的凸集合ならば $C \subset E(D)$ またはそうでなかったら $\mathrm{ri}\,(C) \bigcap E(D) = \emptyset$ である。

定理 2　集合 $E(D)$ は連結であり、有限個の有界な基本的凸集合の和集合である。

[2] において、集合 $E(D)$ を求めるための**実際のルール**が次のように述べられている。

ルール 1　$\boldsymbol{x} \notin D$ で族 $\Gamma(\boldsymbol{x})$ が適当な半空間に含まれるならば $\boldsymbol{x}$ を含むすべての基本的凸集合 C に対して $\mathrm{ri}\,(C) \bigcap E(D) = \emptyset$ である。 □

ルール 2　$\boldsymbol{x} \notin D$ が基本的凸集合 C の相対的内点であり族 $\Gamma(\boldsymbol{x})$ が適当な半空間に含まれないならば $C \subset E(D)$ である。 □

4. $E(D)$ を求めるアルゴリズム

定理 3　C を $\mathrm{int}\,(C) \neq \emptyset$ であるような有界な基本的凸集合とし、$\mathrm{bd}\,(C) \subset E(D)$ と仮定する。このとき $C \subset E(D)$ となる。

系 1 と定理 2 より L に含まれる任意の 2 つの (P) の有効解をつなぐ $L \bigcap E(D)$ に含まれる折れ線が存在する。集合 $L \bigcap E(D)$ を $E(D)$ の**フレーム**とよぶ。定理 3 より $E(D)$ のフレームが求まれば $E(D)$ が構成できるので $E(D)$ のフレームを求めるフレーム生成アルゴリズムを提案する。

点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ がある基本的凸集合の端点であるとき $\boldsymbol{x}$ を**交点**とよぶ。I をすべての交点の集合とする。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in I$ に対して $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] \subset L$, $\mathrm{ri}\,([\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]) \bigcap I = \emptyset$ であるとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を互いに**隣接する**交点という。

フレーム生成アルゴリズム

ステップ 1　$V = D$ とし、$S = \emptyset, T = \emptyset$ とする。

ステップ 2　$V = S$ ならば終了 (T が $E(D)$ のフレームである)。そうでなかったら $\boldsymbol{x}_0 \in V \setminus S$ を任意に選び、$S = S \bigcup \{\boldsymbol{x}_0\}$ とする。

ステップ 3　W を $\boldsymbol{x}_0$ に隣接するすべての交点の集合とする。

ステップ 4　$W = \emptyset$ ならばステップ 2 へ。そうでなければ $\boldsymbol{y}_0 \in W$ を任意に選び、$W = W \setminus \{\boldsymbol{y}_0\}$ とする。

ステップ 5　$[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0] \subset T$ ならばステップ 4 へ。そうでなかったら任意の $\boldsymbol{z}_0 \in \mathrm{ri}\,([\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0])$ に対して $\Gamma(\boldsymbol{z}_0)$ が適当な半空間に含まれるかどうかを調べ、$\Gamma(\boldsymbol{z}_0)$ が適当な半空間に含まれないならば $T = T \bigcup [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0]$ とし、$\boldsymbol{y}_0 \notin V$ ならば $V = V \bigcup \{\boldsymbol{y}_0\}$ とする。ステップ 4 へ。

5. おわりに

本稿では、$\mathbb{R}^2$ における凸多面ゲージを用いた多目的配置問題 (P) を考え、(P) のすべての有効解を効率的に求めるアルゴリズムとして $E(D)$ のフレームを求めるフレーム生成アルゴリズムを提案した。

参考文献

[1] A. Brøndsted, *An introduction to convex polytopes*, Springer, New York (1983)

[2] R. Durier, *On pareto optima, the Fermat-Weber problem, and polyhedral gauges*, Math. Programming, **47** (1990), 65-79

[3] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1970)