2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Bradley-Terry モデルによる固有値法と幾何平均の比較

01404360 日本大学 西澤一友 NISHIZAWA Kazutomo

1 はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) でウエイトを求める方法は今までにいくつか提案されている。一般的な方法としては、固有値法と幾何平均があげられる。しかし、どの方法が優れているかの判断はなかなか難しく、判定の方法としては、正解と仮定したウエイトに作為的に誤差を加えて一対比較行列を作り、得られた結果で判定するのが現状である。また、誤差の設定により結果に偏りが生じる場合が多く評価の方法は確立していない。そこで、従来とは異なった評価方法としてBradley-Terry モデル (BTモデル) によりバイナリAHPについて固有値法と幾何平均の比較を行ってみた。

2 従来の評価方法

$n \times n$ 一対比較行列Aの要素を$a_{ij}(i = 1 \sim n, j = 1 \sim n)$とし、そのウエイトを$W(w_i, i = 1 \sim n)$とする。整合性が良い場合には、$a_{ij} = w_i/w_j$の関係が成り立っている。そこで、従来、ウエイトを求める方法の評価方法として次式により誤差を作為的に入れ、一対比較行列A'作り、W'を求めWと比較している。

$$\log a'_{ij} = \log w_i - \log w_j + \log e_{ij} \tag{1}$$

ここで、誤差項$\log e_{ij}$は正規乱数や一様乱数で与えることが多いが、そのとき、幾何平均による結果の方が良い場合が多い。これはガウス・マルコフの定理からも推測されるとおりである。また、一対比較をするときの誤った判断が正規分布や一様分布で表されるのか確かではない。

3 Bradley-Terry モデル

BTモデルは確率によりスポーツの評価などに使われている [1]。たとえば、nチームでの野球のリーグ戦でそれぞれのチームの強さをウエイト$W(w_i, i = 1 \sim n)$と仮定したとき、チームiがチームjに勝つ確率を次式で表す。

$$p_{ij} = w_i/(w_i + w_j) \tag{2}$$

このようにして作った要素をまとめて行列$P(p_{ij}, i = 1 \sim n, j = 1 \sim n)$とする。

4 バイナリ AHP への適用

スポーツの評価はバイナリ AHP でもよく行う。野球の例では勝敗で一対比較行列を作り、チームの順位、すなわち強さのウエイトを求めている。たとえば、チームiとチームjの対戦結果を一対比較行列Aの要素a_{ij}とし、チームiがチームjに勝ったとすると、$a_{ij} = \theta$、$a_{ji} = 1/\theta$とする。ここで、θはパラメータであり、正の実数とする。

BTモデルにバイナリ AHP を適用する場合、次のように仮定する。チームiがチームjに勝つか負けるか判定するとき、[0,1] の一様乱数Uを用い、$p_{ij} < U$ならばチームiがチームjに勝ったとし、$a_{ij} = \theta$とする。もちろんa_{ji}はa_{ij}の逆数である。ただし、$a_{ii} = 1$である。

このようにして一つの一対比較行列A_1を作成する。一様乱数により作成しているのでm個目の一対比較行列A_mまで作ることができる。それぞれの一対比較行列から得られたウエイトの平均をとれば仮定した強さのウエイトWに近くなるはずである。

5 固有値法と幾何平均の比較

上記の方法で作成した一対比較行列について、固有値法と幾何平均でそれぞれウエイトを求め比較を行う。各チームの強さのウエイトWを仮定してA_1からA_mまで作り、固有値法と幾何平均での各ウエイトの平均$\overline{W_{EV}}(\overline{w_{EVi}}, i = 1 \sim n)$と$\overline{W_{GM}}(\overline{w_{GMi}}, i = 1 \sim n)$を求め、どちらが$W$に近いかを残差平方和$RSS$(Residual Sum of Squares) により比較する。固有値法と幾何平均のRSSはそれぞれ次式によりを求め、値の小さい方を正解に近いと評価する。

$$RSS_{EV} = \sum_{k=1}^{n}(w_k - \overline{w_{EVk}})^2 \tag{3}$$

$$RSS_{GM} = \sum_{k=1}^{n}(w_k - \overline{w_{GMk}})^2 \tag{4}$$

6 適用例

例として、6チームでの野球のリーグ戦の結果を適用する。何試合か行った各チームの勝率$\boldsymbol{W}_0$を以下に示す。

$$\boldsymbol{W}_0 = \begin{bmatrix} .585 & .556 & .541 & .489 & .444 & .385 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\boldsymbol{W}_0$の総和を1に正規化した$\boldsymbol{W}$は以下のようになる。

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} .195 & .185 & .180 & .163 & .148 & .128 \end{bmatrix} \quad (6)$$

この$\boldsymbol{W}$を各チームの強さのウエイトとし、式(2)より行列$\boldsymbol{P}$を求めると以下のようになる。

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.512 & 0.519 & 0.544 & 0.568 & 0.603 \\ 0.487 & 0.500 & 0.506 & 0.532 & 0.556 & 0.590 \\ 0.480 & 0.493 & 0.500 & 0.525 & 0.549 & 0.584 \\ 0.455 & 0.467 & 0.474 & 0.500 & 0.524 & 0.559 \\ 0.431 & 0.444 & 0.450 & 0.475 & 0.500 & 0.535 \\ 0.396 & 0.409 & 0.415 & 0.440 & 0.464 & 0.500 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$\boldsymbol{P}$をもとにして一様乱数により、まず一対比較行列$\boldsymbol{A}_1$を作ると以下のようになる。

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta & 1/\theta & \theta & 1/\theta \\ 1/\theta & 1 & \theta & \theta & \theta & \theta \\ 1/\theta & 1/\theta & 1 & 1/\theta & \theta & \theta \\ \theta & 1/\theta & \theta & 1 & \theta & \theta \\ 1/\theta & 1/\theta & 1/\theta & 1/\theta & 1 & 1/\theta \\ \theta & 1/\theta & 1/\theta & 1/\theta & \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$\theta = 2$として$\boldsymbol{A}_1$より得られた固有値法でのウエイト$\boldsymbol{W}_{EV1}$と幾何平均のウエイト$\boldsymbol{W}_{GM1}$を以下に示す。

$$\boldsymbol{W}_{EV1} = \begin{bmatrix} .190 & .224 & .137 & .217 & .081 & .148 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{W}_{GM1} = \begin{bmatrix} .178 & .224 & .141 & .224 & .089 & .141 \end{bmatrix} \quad (10)$$

同じ手順で$\boldsymbol{A}_k$まで作成し、得られた各ウエイトを平均した$\overline{\boldsymbol{W}_{EV}}$と$\overline{\boldsymbol{W}_{GM}}$より$\boldsymbol{RSS}_{EV}$、$\boldsymbol{RSS}_{GM}$を求めた。

その結果、k=30000のとき、$\boldsymbol{RSS}_{EV}$=0.014633、$\boldsymbol{RSS}_{GM}$=0.013470で幾何平均が良い結果となった。

7 シミュレーション

さらに、固有値法と幾何平均の比較を行うため、一対比較行列のサイズとパラメータθの値を変えてシミュレーションを行った。一対比較行列のサイズは$n = 5, 10, 20$とし、θの値は2から20まで変化させた。上記の方法によりk=30000として$\boldsymbol{A}_1$からは$\boldsymbol{A}_k$まで作成した。

仮定するウエイト$\boldsymbol{W}$は、$w_i = i(i = 1 \sim n)$として総和を1に正規化した等間隔のものと、w_iを一様乱数で決めて総和を1に正規化したものの二種類とした。

等間隔のウエイトを仮定した場合の結果の一部を表1に示す。

表 1: 等間隔ウエイトを仮定した場合のRSS

	$n = 10$		$n = 20$	
θ	固有値法	幾何平均	固有値法	幾何平均
2	0.01234	0.01168	0.00676	0.00643
4	0.00664	0.00352	0.00371	0.00193
6	0.00545	0.00118	0.00310	0.00064
8	0.00498	0.00035	0.00288	0.00016
10	0.00477	0.00006	0.00279	0.00002
12	0.00468	0.00001	0.00273	0.00001
14	0.00454	0.00011	0.00271	0.00008
16	0.00457	0.00022	0.00268	0.00019
18	0.00445	0.00041	0.00268	0.00031
20	0.00452	0.00057	0.00265	0.00046

表1では、$n = 10$、$n = 20$の場合ともに、$\theta = 2$では固有値法、幾何平均ともにRSSの値はほぼ同じである。しかし、θの値が大きくなるにつれ、幾何平均のRSSはしだいに小さくなり、再び大きくなっている。一方、固有値法ではθの値が大きくなるにつれRSSの値は小さくなる傾向はあるが、幾何平均のように顕著ではない。乱数でウエイトを仮定した場合もほぼ同様の結果であった。

8 結論

BTモデルをバイナリＡＨＰに適用したところ、固有値法と幾何平均の比較では幾何平均の方が良い結果となった。また、幾何平均では、RSSが最小となるようなパラメータθの値があることがわかった。しかし、なぜその値のとき最小となるかは不明で今後の検討課題である。

参考文献

[1] 竹内啓、藤野和建：スポーツの数理科学、共立出版、(1989)、pp27-37.