不完全情報における欠落要素の推定

01404360 日本大学 西澤一友 NISHIZAWA Kazutomo

1 はじめに

不完全情報でのAHP (Analytic Hierarchy Process) では、欠落した要素やウエイトを推定する方法が数多く提案されている。その中で代表的なものはHarker法 (HM) やTwo-Stage法 (TSM) である。

今回提案する方法は、整合性を改善する試み[1]から発想し、不完全情報の推定に応用したものである。この方法は、対数最小二乗法 (LLS) で求めたウエイトを使って推定するTSMと似ているが、欠落でない一対比較行列の要素を使って推定するところが異なっている。

本報告ではこの推定方法について、他のいくつかの方法、特にTSMと比較しながら評価を行う。

2 欠落要素の推定方法

$n\times n$一対比較行列Aの要素を$a_{ij} (i=1\sim n, j=1\sim n)$とし、そのウエイトを$W(w_i, i=1\sim n)$とする。$A$が完全情報で整合性が良い場合、$a_{ij}=w_i/w_j$の関係が常に成り立っており、任意の$k$について次の関係が得られる。

$$a_{ij}=(w_i/w_k)/(w_j/w_k)=a_{ik}/a_{jk}=a_{kj}/a_{ki} \quad (1)$$

そこで、もしa_{ij}が欠落要素のとき次式によりa_{ij}を推定する。

$$a_{ij}=(\prod_{k=1}^{n} a_{kj}/a_{ki})^{1/m} \quad (2)$$

式(2)で、欠落要素を含むa_{kj}/a_{ki}の項の値は1とし、mは欠落要素を含まない項の数として計算する。すなわち$k=1\sim n$について欠落要素を含まないm個のa_{kj}/a_{ki}で幾何平均をとる。

3 適用例

提案した方法による適用例として、完全整合の場合と完全整合でない場合について示し、他の方法での結果とともに比較を行う。完全整合の場合は正解のウエイトは既知であり、一対比較行列の任意の要素をわざと欠落させ、それを推定して正解と比較する。完全整合でない場合は正解のウエイトが未知のため比較はできないが、各方法により得られたウエイト相互で比較する。

3.1 完全整合の場合

最初の適用例は$n=4$の場合の完全整合の一対比較行列A_oである。

$$A_o=\begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 & 4.000 & 8.000 \\ 0.500 & 1.000 & 2.000 & 4.000 \\ 0.250 & 0.500 & 1.000 & 2.000 \\ 0.125 & 0.250 & 0.500 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A_oは$\lambda_{max}=4.0$、$CI=0.0$が得られ完全整合である。得られたウエイトの総和を1に正規化したW_oは以下のようになる。

$$W_o=\begin{bmatrix} 0.533333 & 0.266667 & 0.133333 & 0.066667 \end{bmatrix} \quad (4)$$

次にA_oの要素であるa_{o13}とa_{o34}を作為的に欠落させ、値を0とした一対比較行列Aを以下に示す。もちろんa_{o31}とa_{o43}も欠落となる。

$$A=\begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 & 0.000 & 8.000 \\ 0.500 & 1.000 & 2.000 & 4.000 \\ 0.000 & 0.500 & 1.000 & 0.000 \\ 0.125 & 0.250 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (5)$$

欠落要素を除いてLLSにより求め、総和を1に正規化したウエイト$W'(w'_i, i=1\sim 4)$を以下に示す。

$$W'=\begin{bmatrix} 0.508428 & 0.285346 & 0.142673 & 0.063554 \end{bmatrix} \quad (6)$$

TSMでは欠落要素a_{ij}をW'の要素w'_iとw'_jを用いて推定する。この例では

$$a_{13}=w'_1/w'_3=3.563595$$

$$a_{34}=w'_3/w'_4=2.244924$$

となる。したがってTSMにより推定した一対比較行列A_{TSM}は次のようになる。

$$A_{TSM}=\begin{bmatrix} 1.000000 & 2.000000 & 3.563595 & 8.000000 \\ 0.500000 & 1.000000 & 2.000000 & 4.000000 \\ 0.280616 & 0.500000 & 1.000000 & 2.244924 \\ 0.125000 & 0.250000 & 0.445449 & 1.000000 \end{bmatrix} \quad (7)$$

一方、提案する方法では、この場合、式(2)で欠落を含まない項は1つだけなので、次のようになる。

$$a_{13} = a_{23}/a_{21} = 4, \quad a_{34} = a_{24}/a_{23} = 2$$

したがって提案する方法により推定した一対比較行列$\overline{A}$は次のようになる。

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 & 4.000 & 8.000 \\ 0.500 & 1.000 & 2.000 & 4.000 \\ 0.250 & 0.500 & 1.000 & 2.000 \\ 0.125 & 0.250 & 0.500 & 1.000 \end{bmatrix} \tag{8}$$

得られた$\overline{A}$は要素を欠落させる前のA_0と一致している。

Aについて、各方法で求めたウエイトを表1に示す。表1ではまず正解のW_0を示し、LLS、TSMの結果を、さらにHMと関谷法 (SM)[2]の結果、そして提案した方法により推定した$\overline{A}$より求めた$\overline{W}$を示す。

表 1: 完全整合の場合の比較

W_0	0.533333	0.266667	0.133333	0.066667
LLS	0.508428	0.285346	0.142673	0.063554
TSM	0.522846	0.269199	0.142600	0.065356
HM	0.533340	0.266665	0.133327	0.066668
SM	0.533334	0.266665	0.133334	0.066667
$\overline{W}$	0.533333	0.266667	0.133333	0.066667

表1より、提案した方法による$\overline{W}$は、TSMよりも良い推定をしていることがわかる。さらに、HM、SMの結果もまた正解であるW_0と一致している。

3.2 完全整合でない場合

次に完全整合でない場合の適用例を示す。対象とする行列A[2]を以下に示す。

$$A = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.707000 & 1.189000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 1.148700 & 1.000000 \\ 1.414427 & 0.870549 & 1.000000 & 0.743000 \\ 0.841043 & 1.000000 & 1.345895 & 1.000000 \end{bmatrix} \tag{9}$$

完全整合の場合と同様にして、TSMで一対比較行列を求めると以下のようになる。

$$A_{TSM} = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0.901152 & 0.707000 & 1.189000 \\ 1.109690 & 1.000000 & 1.148700 & 1.000000 \\ 1.414427 & 0.870549 & 1.000000 & 0.743000 \\ 0.841043 & 1.000000 & 1.345895 & 1.000000 \end{bmatrix} \tag{10}$$

また、提案した方法により推定した一対比較行列は以下のようになる。

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0.855455 & 0.707000 & 1.189000 \\ 1.168968 & 1.000000 & 1.148700 & 1.000000 \\ 1.414427 & 0.870549 & 1.000000 & 0.743000 \\ 0.841043 & 1.000000 & 1.345895 & 1.000000 \end{bmatrix} \tag{11}$$

各方法により得られたウエイトの一覧を表2に示す。

表 2: 完全整合でない場合の比較

W_0	-	-	-	-
LLS	0.235911	0.261788	0.244468	0.257833
TSM	0.234350	0.261778	0.245670	0.258201
HM	0.233600	0.262593	0.245575	0.258232
SM	0.234246	0.263352	0.244973	0.257428
$\overline{W}$	0.231338	0.265084	0.245271	0.258307

表2より各方法での結果に大きな違いは見られなかった。しかし、この場合は正解のウエイトがわからないのでどの方法が優れているのか評価はできなかった。

4 結論

不完全情報の推定の方法を提案した。適用例では完全整合の場合は欠落要素を正確に推定することができ、TSMより良い結果が得られた。しかし、完全整合でない場合には評価の方法がなく、比較はできなかった。

また、正解のウエイトを仮定し、各方法による不完全情報の推定シミュレーションも試みたが、一対比較行列のサイズ、欠落の場所、欠落の数、整合性によって推定結果の評価が異なることが多くまだまだ問題点が残されている。

今後、推定方法の開発とともに評価の方法の確立が望まれる。

参考文献

[1] 西澤一友：整合性の改善方法とその評価、日本オペレーションズ・リサーチ学会2000年度春季研究発表会、(2000)、pp170-171.

[2] 木下栄蔵編:AHPの理論と実際、日科技連、(2000)、pp218-219.