2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

一対比較行列のベキ等性による整合度と系統的誤差

01104400 法政大学 加藤 豊 KATO Yutaka
01007500 慶応義塾大学 ＊小澤 正典 OZAWA Masanori

1. ベキ等性による整合度

階層化意思決定法 (AHP) においては，一対比較行列からウェイトを推定したときにその一対比較行列にどの程度誤差が含まれているかが問題となる．その際に，一対比較行列の整合度としてサーティの整合度が使用される．しかし，それ以外の方法でもその整合度を測ることは可能である [2]．そこで，本研究では，整合度を測る尺度として一対比較行列のベキ等性を利用した整合度を提案する．また，一対比較行列に系統的な誤差が含まれる場合の関係についても考察する．

● ベキ等性

一対比較行列の整合性は，各要素について

$$a_{ij} = a_{ik}a_{kj}, \text{ for } i, j, k = 1, \ldots, n$$

が成立することである．このことは

$$a_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}, \text{ for } i, j = 1, \ldots, n$$

と同じことになる [2]．これは，一対比較行列を A としたときに，

$$A = \frac{1}{n}A^2$$

と表せる．そこで，このベキ等性の関係を使用して整合度を測ることを考える．

サーティの整合度

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

は，一対比較行列からウェイトを推定したときの残差として考えることも可能である．一方，ベキ等性からの整合性では，推定の残差としてではなく，行列そのものが持つ誤差を示す量として考えることが可能である．

● ベキ等性の一般化

また，このベキ等性の関係を一般化して，

$$b_{ij}(s) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^s a_{kj}^s\right)^{1/s}, \text{ for } i, j = 1, \ldots, n$$

と a_{ij} の差として考える．そこで，ベキ等性の整合度 $ICI(s)$ として

$$ICI(s) = \left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} - b_{ij}(s)\right)^2\right\}^{1/2}$$

を提案する．

つぎの図は，$N(0, \sigma^2)$ からの対数正規分布の誤差を持つ一対比較行列において，ベキ等性の整合度のパラメータによる違いを示している．

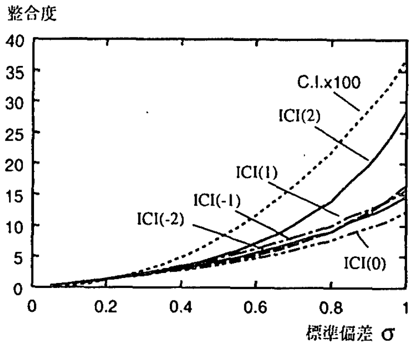

図 1 : 各整合度の違い

2. 系統的誤差

一対比較行列に含まれる誤差として，一般的な対数正規分布などを仮定する場合が多い．これは，一対比較行列の要素の対数をとったときに，誤差の分布が対称分布になることを仮定するものである．しかし，一対比較行列の作成では，人が同時にすべての比較をするために，誤差が系統的に含まれる場合がある．ここで，この系統的な誤差を，つぎのような関数 f によって定める．

$$a_{ij} = f(\delta_{ij} \cdot w_i/w_j).$$

系統的な誤差のための関数として，次の２つの関数を考える．

1. 対数関数型

$$f_{\log}(x) = a\log(x + a - 1) + 1 - a\log(a)$$

これは，$f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ となる凹関数．

2. 指数関数型

$$f_{\exp}(x) = b\exp(a(x-1)) + 1 - b$$

ここで，$b = (\hat{x}-1)/(\exp(a(\hat{x}-1))-1)$ で，$f(\hat{x}) = \hat{x}$ となる凸関数．

つぎの図は，δ_{ij} が $N(0, 0.05)$ から作成した対数正

規分布に従う場合に，10000回比較行列を生成したときの各パラメータにおけるベキ等性の整合度の平均値を示したものである．

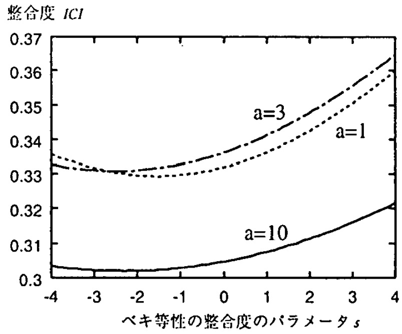

図 2 : 変換関数 $f_{\log}$ の場合

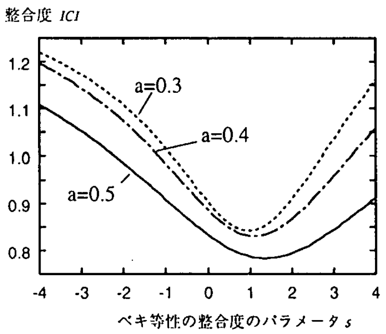

図 3 : 変換関数 $f_{\exp}$ の場合

3. 一般平均法のパラメータとの関係

ウェイトを推定する際に利用できる一般平均法[1]にも，1つのパラメータがある．

一般平均法は，つぎの関数を $\left(\frac{1}{n}\sum w_i^{-r}\right)^{-1/r} = 1$ の下で最小化する方法である．

$$\frac{1}{2n^2 \cdot r^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left((\sqrt{a_{ij}}w_j)^{-r} - (\sqrt{a_{ji}}w_i)^{-r}\right)^2$$

そのときの推定ウェイトは，各行の一般平均になる．

$$\hat{w}_i = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{r}\right)^{1/r}, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n$$

この一般平均法の推定ウェイトと真のウェイト (w_i) からの距離と系統的な誤差の関係については[3]で議論されている．そこで，ベキ等性の整合度におけるパラメータと一般平均法のパラメータの間の関係を調べた．

つぎの図4は，先のシミュレーションと同様に系統的な誤差を含む一対比較行列を作成し，真のウェイトからの距離が最小となる一般平均法のパラメータ $\hat{r}$ とベキ等性の整合度が最小となるパラメータ $\hat{s}$ との相関を示す．また，図5は $|\hat{r} - \hat{s}|$ のヒストグラムを示したものである．

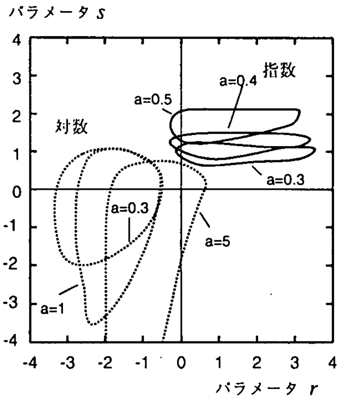

図 4 : $\hat{r}$ と $\hat{s}$ の相関

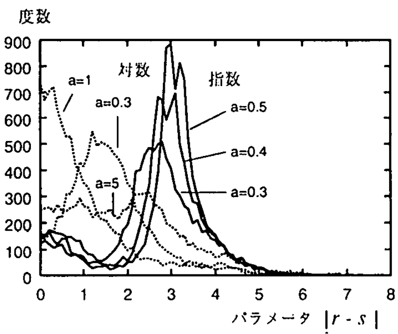

図 5 : 最適なパラメータの $|\hat{r} - \hat{s}|$

4. まとめ

1. ベキ等性の整合度を一般化して1つのパラメータを導入した．整合度の動きとしては，サーティの整合度と大きな違いはない．
2. ベキ等性を使用した整合度を使用することにより，一対比較行列に系統的な誤差を含む場合にその検出が可能である．
3. 一般平均法による推定ウェイトが真のウェイトに近くなるときのパラメータの値と，ベキ等性の整合度が小さくなるときのパラメータに関係がある．

参考文献

[1] Kato,Y, Ozawa,M "The characteristics of the consistency function of the general mean method", Proceedings of ISAHP'99, pp77-82, 1999.

[2] 加藤豊，小澤正典, "AHPにおける一対比較の整合性の評価", 日本OR学会2000年度春季研究発表会アブストラクト集, pp106-107,2000

[3] 加藤豊，小澤正典, "AHPにおける一般平均法のパラメータと誤差", 日本OR学会2000年度秋季研究発表会アブストラクト集, pp296-297,2000

[4] 景山ほか, "一対比較行列の系統的誤差について", 法政大学工学部卒業論文，2001