クロス効率性分析による学生の成績評価と科目の評価

01206313　静岡大学　*関谷 和之　SEKITANI Kazuyuki
02302623　静岡大学　瀧口 弘幸　TAKIGUCHI Hiroyuki

1　はじめに

DEA(Data Envelopment Analysis) による評価では，効率的であると判定される DMU(Decision Making Unit) が大多数になることがある．このような場合における DMU の順位付けの方法として，クロス効率値を用いたクロス効率性行列の研究 [2, 4, 6] がある．

本研究では，各学生を 1 入力多出力の DMU として，選択科目制における学生の成績評価と科目の評価を最適化評価モデル [3] で行う．つまり，クロス効率値に基づく評価行列を ANP での超行列と見なし，固有ベクトル法により，科目と学生の重要度を算出する．この結果を平均点，ANP[1] による評価結果と比較検討する．

2　1入力でのクロス効率値による評価行列

学生 i を DMU_i とし，選択科目は全体で r 種類あるとする．学生 i の科目 j の成績を DMU_i の j 番目の出力値とする．そこで，n 個の DMU と 1 種類の入力と r 種類の出力からなる DEA を考える．(DMU_i の j 番目の出力値) / (DMU_i の入力値) を y_{ij} と記す．DMU_i の入力 1 単位当たりの出力値ベクトルを $\boldsymbol{y}_i = (y_{i1}, \cdots, y_{ir})$ とし，$\boldsymbol{y}_i$ を第 i 行ベクトルに持つ行列を Y とする．このとき，DEA において，DMU_i の効率値を算出した際の最適解は，一意に決定できるとは限らないので，最適解の集合を U^i とする．また，$\boldsymbol{u}^i \in U^i$ を DMU_i の評価ベクトルと呼ぶ．DMU_i の評価ベクトル $\boldsymbol{u}^i$ を第 i 列にもつ行列を U とする．

DMU_i の効率値を算出するために用いた評価ベクトル $\boldsymbol{u}^i \in U^i$ によって，DMU_j を評価するというクロス効率性分析が提案 [6] されており，この評価値 $\boldsymbol{y}_j\boldsymbol{u}^i$ をクロス効率値 $e_j(\boldsymbol{u}^i)$ と呼ぶ．このクロス効率値 $e_j(\boldsymbol{u}^i)$ は，$\boldsymbol{u}^i \in U^i$ の選び方によって値が異なるという任意性の問題 [2] が存在する．

このクロス効率値 $e_j(\boldsymbol{u}^i)$ を第 (i,j) 要素にもつ行列がクロス効率性行列である．クロス効率性行列の対角成分 $e_i(\boldsymbol{u}^i)$ は，DMU_i の効率値であり，$\boldsymbol{u}^i \in U^i$ の選び方に依存せずに一定である．また，$e_j(\boldsymbol{u}^i)/e_i(\boldsymbol{u}^i)$ は，DMU_i の評価ベクトル $\boldsymbol{u}^i$ のもとで，DMU_i と DMU_j の効率性に関する比較値と考えることができる．そこで，$e_j(\boldsymbol{u}^i)/e_i(\boldsymbol{u}^i)$ を第 (i,j) 要素にもつ行列 $E(U)$ を，

$$E(U) = \begin{bmatrix} \frac{e_1(\boldsymbol{u}^1)}{e_1(\boldsymbol{u}^1)} & \cdots & \frac{e_1(\boldsymbol{u}^n)}{e_n(\boldsymbol{u}^n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{e_n(\boldsymbol{u}^1)}{e_1(\boldsymbol{u}^1)} & \cdots & \frac{e_n(\boldsymbol{u}^n)}{e_n(\boldsymbol{u}^n)} \end{bmatrix}$$

とする．行列 $E(U)$ は，AHP における一対比較行列と見なすことができる．本研究では，この行列 $E(U)$ に対して，固有ベクトル法に基づく方法で各 DMU の重要度を求める．つまり，行列 $E(U)$ の主固有ベクトルを学生の重要度とする．

3　科目の重要度の導出

行列 $E(U)$ を ANP(Analytic Network Process) での超行列として表すことによる科目の重要度の導出法について以下に述べる．

行列 $E(U)$ の主固有値，主固有ベクトルを，それぞれ $\Lambda(E(U)), \boldsymbol{w}$ とすると，固有方程式 $E(U)\boldsymbol{w} = \Lambda(E(U))\boldsymbol{w}$ が成り立つ．また，DMU_i の効率値を対角成分にもつ対角行列を Θ とすると，$YU\Theta^{-1} = E(U)$ であるので，$YU\Theta^{-1}\boldsymbol{w} = \Lambda(E(U))\boldsymbol{w}$ が成立する．ここで，

$$\bar{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda(E(U))}} U\Theta^{-1}\boldsymbol{w} \tag{1}$$

とすると，

$$Y\bar{\boldsymbol{w}} = \sqrt{\Lambda(E(U))}\boldsymbol{w} \tag{2}$$

である．(1)，(2) より，

$$\begin{bmatrix} 0 & U\Theta^{-1} \\ Y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{w}} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \sqrt{\Lambda(E(U))} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{w}} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \tag{3}$$

が成り立つ．

$$S(U) = \begin{bmatrix} 0 & U\Theta^{-1} \\ Y & 0 \end{bmatrix}$$

とすると，$S(U)$ は，学生と科目の相互評価構造を示す行列であり，ANP での超行列と見なすことができる．(3) は ANP の基本方程式 [5] であり，$\sqrt{\Lambda(E(U))}$ は，$S(U)$ の主固有値なので，$[\bar{\boldsymbol{w}}^\top, \boldsymbol{w}^\top]^\top$ は，ANP の解析結果である．よって，$\bar{\boldsymbol{w}}$ は科目に対する重要度ベクトルに相当し，$\boldsymbol{w}$ は，ANP でも学生に対する重要度ベクトルに相当する．

4 選択科目制における成績評価

学生 92 人，選択科目 65 科目の各科目を 100 点満点で評点したデータ [1] を用い，学生と科目の重要度を算出した．学生 i の科目 j を評点を z_{ij} とする．選択科目数は，多い学生で 55 科目，少ない学生で 25 科目である．また，受講学生数は，最多で 92 人，最小で 8 人である．

入力値をすべて 1 とし，$y_{ij} = z_{ij}$ として，以下の条件 1,2 の下で，DEA により $U^1, \ldots, U^{92}$ を決定した．

1. 選択していない科目のウエイトはすべて 0.
2. ウエイトの最大値が最小値の 10 倍以内.

このとき，DEA で非効率的と判定された学生は，34, 38, 48, 52, 65 であった．また，行列 $S(U)$ の主固有値の最大値 [3] を達成する行列を $S(\hat{U})$ とし，(3) より，学生と科目の重要度を求めた．この結果を表 1 に示す．

表 1: 各評価方法での順位

順位	学生	ANP[1] 順位	合計点 (順位)	平均点 (順位)
1	19	5	3062(5)	90.059(1)
2	90	2	3123(3)	89.229(2)
3	33	1	4370(1)	79.455(19)
4	18	4	3066(4)	85.167(6)
5	32	25	2536(28)	81.806(15)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
88	55	49	2350(55)	73.438(42)
89	91	42	2382(50)	68.057(69)
90	30	87	2011(87)	64.871(80)
91	89	54	2361(52)	67.457(71)
92	1	73	2252(72)	64.343(83)

表1では，(3) による順位は，合計点，平均点，ANP[1] の評価方法の結果とは異なる．これは，合計点による評価では，科目の重要度が一定であるが，ANP，(3) による解析では，図 1 のように，受講者数に対して，科目の重要度が一定でないためである．

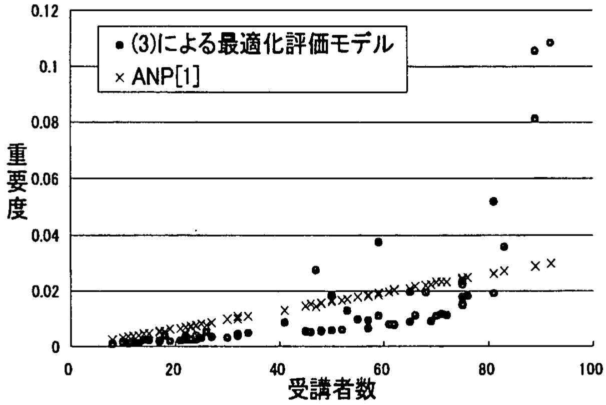

図 1: 受講者数と科目の重要度

ANP[1] での評価結果では，受講者数と科目の重要度の間に直線的な関係が見られるが，(3) の評価結果では，ANP[1] での結果よりも，受講者数が多い科目ほど重要度が高くなる傾向がある．

また，DEA で非効率的と判定された学生とその学生の参照集合に属する学生の順位関係を表 2 に示す．

表 2: 非効率な学生の順位

非効率な学生	34(80)	38(11)	48(38)	52(71)	65(74)
参照集合に属する学生 (順位)	18(4) 19(1) 33(3) 41(21) 43(30) 64(13) 90(2)	18(4) 19(1) 90(2)	17(8) 18(4) 19(1) 33(3) 90(2)	7(54) 19(1) 33(3)	6(9) 18(4) 19(1) 74(34) 76(33) 90(2)

非効率的な学生の参照集合に属する学生は，必ず非効率的な学生より上位に評価されていることがわかる．

5 おわりに

提案した(3) によるクロス効率性分析での評価では，平均点や ANP[1] による方法の評価と異なる順位付けとなった．この方法では，各学生は，自分にとって有利になるように各科目に対する評価ベクトル $\boldsymbol{u}^i$ を決めると仮定し，DEA での最適解を用いることにより，学生にとって，最も有利なウエイト付けとなるとした．また，クロス効率値による評価行列を超行列で表すことにより，学生と科目の重要度を同時に算出できた．

参考文献

[1] 大澤慶吉, 西澤一友：ANP による学生の成績評価, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2000 年度秋季研究発表会,(2000)134-135.

[2] 枇々木規雄：DEA における修正クロス効率値を用いた評価法, Journal of the Operations Research Society of Japan,41(1998)229-244.

[3] Kazuyuki Sekitani : Prioritization model for decision making units in Data Envelopment Analysis from uncertain cross-evaluation values by eigenvalue method, 統計数理研究所共同研究レポート 135 最適化:モデリングとアルゴリズム 14,(2000 年 12 月)20-41.

[4] 杉山学, 山田善靖：事業体間の相互評価情報を用いた調和的な効率性評価法, Journal of the Operations Research Society of Japan,39(1996)159-174.

[5] 高橋磐郎：AHP から ANP への諸問題 V, オペレーションズ・リサーチ, (1998 年 5 月号)289-293.

[6] T.R.Sexton,R.H.Silkman and A.J.Hogan : Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions. In R.H.Silkman(eds.), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, Jossey Bass,San Francisco,(1986)73-105.