2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

大規模問題に対する区間AHP

01702180 静岡大学 *八巻直一 YAMAKI Naokazu
01206350 群馬大学 杉山 学 SUGIYAMA Manabu
02991883 静岡大学 劉 暁東 LIU Xiaodong
01700910 東京理科大学 山田善靖 YAMADA Yoshiyasu

1 はじめに

意思決定において，評価項目の重要度の比が主観に依存する場合が多い．階層的分析法AHP(Analitic Hierarchy Process)は，このようなとき評価項目間の重要度の比を定量化する手法として有効であることが知られている．さらに，集団の意思決定にAHPを用いる試みは，Saaty [2] によって導入された．Saatyは，集団の各メンバが自己の信ずる評価項目間の一対比較値を提示し，それらの幾何平均値を集団の一対比較値とすることを提案している．他方，山田ら [3] は，集団の各メンバが自己の信ずる一対比較値を，区間で提示することを提案している．この区間は主張区間と呼ばれ，区間内に集団の一対比較値が含まれることを要請するとともに，区間の幅が狭いほど主張が強く，区間の幅が広いほど主張が弱いことをも表す．

しかし，山田らの方法では，集約された集団の一対比較値が，必ずしも各メンバの主張区間に含まれないが，この場合の解釈についてはなにも示していない．また，各評価項目間の主張区間を合成し，集団の一対比較区間を作成する際，各主張区間が共通部分を持たない場合，集団の一対比較区間の導出方法に根拠が薄弱である．劉ら [1] は，不満関数という概念の導入により，山田らの区間AHPの欠点を克服した．

ここでは，劉らの結果を大規模AHP[4] に適用する．

2 不満関数

評価者の主張と離れた一対比較値が，集団の一対比較値と決定されたとき，「不満」は増大するであろう．したがって，不満は主張区間の内部では非常に小さく，外では非常に大きな値をとるような，主張区間に基づく関数となるはずである．評価者kによる，評価項目iに対する評価項目jの重要度の比をx_{ij}^kで表わす．また，x_{ij}^kに対する主張区間を，二つのパラメータによって(p_{ij}^k, q_{ij}^k)と表す．

このとき，p_{ij}^kは主張区間の中央値，q_{ij}^kは幅である．ここで，$\bar{x}_{ij}^k = \log x_{ij}^k$と置いたとき，主張区間とは，$p_{ij}^k - q_{ij}^k \le \bar{x}_{ij}^k \le p_{ij}^k + q_{ij}^k$ となるように集団の一対比較値$\bar{x}_{ij}^k$が定まって欲しいという希望を表す．主張区間内では不満が小さく，主張区間の外では急激に不満が大きくなるような，不満の程度を表す関数が存在すると仮定し，次のような区分的２次関数gで模型化する．

$$g(x|p,q) = \begin{cases} b(x-p+\beta)^2 + aq\beta, & x \le p-q \\ a(x-p)^2, & p-q < x \le p+q \\ b(x-p-\beta)^2 + aq\beta, & p+q < x \end{cases}$$

ただし，$0 < a << b, 0 < q,$
$$\beta = \left(1 - \frac{a}{b}\right) q$$
関数gの基本的な性質は，次のとおりである．

1. 狭義凸であり，$x = p$で最小値$g(p|p,q) = 0$をとる．
2. $p-q \le x \le p+q$の範囲では小さな値をとり，$g(p \pm q|p,q) = aq^2$，$x < p-q$または$p+q < x$では急激に大きな値をとる．

3. g は2階微分可能である．

g をここでは不満関数と呼ぶ．g の一階導関数は連続である．

3 大規模 AHP

大規模 AHP においては，複数の評価者 (n 人) により，多くの評価項目 (m 個) が評価される．このとき，全ての評価項目の間の一対比較が行われるとは限らない．また，ある評価項目間は複数の評価者の一部の集団によって評価される．大規模 AHP による評価の様子を，グラフで示すことにする．ノード i は，i 番目の評価項目を表し，ノード i からノード j への有向枝の値 x_{ij}^k は，評価者 k による評価項目 i に対する評価項目 j の一対比較値を表す．

接続行列 A の l 列は，l 番目の枝の接続を表し，l 番目の枝がノード i から j に接続しているとき，$A_{i,l}=1, A_{j,l}=-1$, その他は0と表される．枝の総数を L とし，l 番目の枝の値が x_{ij}^k であるとする．このとき，A の列に従って列挙したカットベクトルを $z \in R^L$ とする．ウエイトベクトル $w \in R^m$ を対数最小二乗法によって求める．$\bar{x}_{i,j}^k = \log x_{ij}^k, \bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_m)$ とすると，$\bar{w}$ は

$$\min \|A^T\bar{w} - z\| \tag{1}$$

の解として得られる．

$$\bar{w} = (AA^T + ee^T)^{-1}Az + \alpha e \tag{2}$$

ただし，e はすべての要素が1のベクトル，α は任意の実数である．さらに，$w^Te=1$ を考慮して，

$$w_i\frac{1}{c}\exp(\bar{w}_i), \quad i=1,2,\ldots,m \tag{3}$$

ただし，

$$c = \sum_{i=1}^{m}\exp(\bar{w}_i)$$

となる．

4 大規模区間 AHP

大規模 AHP では，グラフ表現された一対比較構造から，(2),(3) によってウエイトベクトルを決定する．ここでは，山田らの区間 AHP を大規模 AHP に適用するために，各評価者は x_{ij}^k に対する主張区間のパラメータ (p_{ij}^k, q_{ij}^k) を提示するものとする．

このとき，各枝に対する不満関数は $g(x_{ij}^k|p_{ij}^k, q_{ij}^k)$ と表される．大規模区間 AHP におけるウエイトベクトル w の決定には，いくつかモデルが考えられる．もっとも簡単なモデルは，

$$\min \delta\|A^T\bar{w}-z\|+(1-\delta)\sum g(x_{ij}^k|p_{ij}^k, q_{ij}^k) \tag{4}$$

ただし，$0 \leq \delta \leq 1$ は多目的最小化問題のパラメータであり，整合性を重視するならば1に近く，不満を小さくすることを重視すれば0に近くとる．

劉らの不満関数を用いた区間 AHP では，不満の大きさをある上限を超えないような制約としている．(4) では，そのような制約は含まれていない．そこで，不満の上限を制約条件としたモデルも考えられる．

$$\begin{array}{ll} \min & \|A^T\bar{w} - z\| \\ \text{s.t.} & g(x_{ij}^k|p_{ij}^k, q_{ij}^k) \leq U \end{array}$$

ただし，U は与えられた不満の上限である．

参考文献

[1] 劉暁東, 八巻直一: 不満関数を用いた区間 AHP, 2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 2000, 138–139.

[2] Saaty,T.L. : Group Decision Making and The AHP, *The Analytic Hierarchy Process*, Springer-Verlag, 1989, 59–67.

[3] 山田善靖, 杉山学, 八巻直一: 合意形成モデルを用いたグループ AHP, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.40 (1997), 236–244.

[4] 八巻直一, 関谷和之 : 複数の評価者を想定した大規模な AHP の提案と人事評価への適用, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.42 (1999), 405–421.