2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

凸幾何上の協力ゲームにおけるコアの安定性

02005050　東京大学　岡本 吉央　OKAMOTO Yoshio

伝統的な協力ゲームでは，プレイヤーの提携としてはプレイヤー全体の任意の部分集合を許していた．しかし，実際にはそのような状況は稀であり，政治的 / 文化的 / 地理的状況により提携として許されないようなプレイヤーの部分集合もある．そのような状況をモデル化したものとして，Bilbao [1] は凸幾何上の協力ゲームを提案している．

プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．N の部分集合族 $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ が N 上の**凸幾何**であるとは，$\mathcal{L}$ が次の 3 つの条件を満たすことである：

1. $\emptyset \in \mathcal{L}$, $N \in \mathcal{L}$,
2. $S, T \in \mathcal{L}$ ならば，$S \cap T \in \mathcal{L}$,
3. $S \in \mathcal{L} \setminus \{N\}$ ならば，ある $i \in N \setminus S$ が存在して $S \cup \{i\} \in \mathcal{L}$.

凸幾何 $\mathcal{L}$ 上の**協力ゲーム**とは，$\mathcal{L}$ 上の関数 $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ で $v(\emptyset) = 0$ を満たすものである．このとき，**提携**は $\mathcal{L}$ の元である．本稿では，伝統的な協力ゲームということばによって $\mathcal{L} = 2^N$ のときの協力ゲームを指すことにする．

凸幾何上の協力ゲームのように提携が制限された協力ゲームは Myerson [6] によるグラフ上のコミュニケーションゲームに始まるが，ある条件を満たすグラフに対するコミュニケーションゲームは凸幾何上の協力ゲームとなる．また，Faigle–Kern [4] による先行制約下の協力ゲームも凸幾何上の協力ゲームと見ることができる．凸幾何は凸性を組合せ論的に抽象化する研究から生まれたものである．そのような組合せ論的側面および組合せ最適化に関する側面については，[3, 5] などを参照せよ．

プレイヤーの集合 N 上の凸幾何 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$ 上の協力ゲーム $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ を考える．以下，利得ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と $S \subseteq N$ に対して，

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

という記法を用いることにする．凸幾何 $\mathcal{L}$ 上の協力ゲーム v の**準配分**の集合 $I^*(\mathcal{L}, v)$ とは

$$I^*(\mathcal{L}, v) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N)\right\}$$

であり，**配分**の集合 $I(\mathcal{L}, v)$ とは

$$I(\mathcal{L}, v) = \{x \in I^*(\mathcal{L}, v) : \\ x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall \{i\} \in \mathcal{L}\}$$

である．準配分はパレート最適な利得ベクトル，配分は個人合理的な準配分である，ということもある．配分の集合 $I(v)$ は空，または，非有界である場合もあることに注意する．

凸幾何 $\mathcal{L}$ 上の協力ゲーム v の**コア** $\mathrm{Core}(\mathcal{L}, v)$ とは

$$\mathrm{Core}(\mathcal{L}, v) = \{x \in I^*(\mathcal{L}, v) : \\ x(S) \geq v(S) \quad \forall S \in \mathcal{L}\}$$

である．コアに含まれる配分は提携合理的であるということがある．コアも空，または，非有界である場合があることに注意する．

次に安定集合を定義する．凸幾何 $\mathcal{L}$ 上の協力ゲーム v に対して，$x, y \in I(\mathcal{L}, v)$，$S \in \mathcal{L}$ とする．ここで，

1. $y(S) \leq v(S)$ かつ

2. 任意の $i \in S$ に対して $y_i > x_i$

を満たすとき，y は S を通じて x を**支配する**，といい，それを $x \prec_S y$ で表す．凸幾何 $\mathcal{L}$ 上の協力ゲーム v の**安定集合**とは，配分の集合 $K \subseteq I(\mathcal{L}, v)$ で次の 2 条件を満たすものである：

1. 任意の $y \in I(\mathcal{L}, v) \setminus K$ に対して，ある $x \in K$ と $S \in \mathcal{L}$ が存在して，$y \prec_S x$,

2. 任意の $x, y \in K$ と $S \in \mathcal{L}$ に対して，$x \not\prec_S y$ かつ $y \not\prec_S x$.

第 1 の条件は**外部安定性**，第 2 の条件は**内部安定性**と呼ばれる．安定集合は空であることもある．また，一般的に安定集合は一意に決まらないが，もし 2 つの異なる安定集合が存在するときは，それらの一方が他方を包含することはない．また，コアと安定集合が非空のときには，必ずコアは安定集合に含まれる．

伝統的な協力ゲーム，すなわち，$\mathcal{L} = 2^N$ のときを考える．このときには，上記の準配分，配分，コア，支配，安定集合の定義は，それらのよく知られた定義に一致することに注意する．Shapley [7] によるよく知られた結果は，協力ゲーム $v : 2^N \to \mathbb{R}$ が**凸ゲーム** (あるいは，優モジュラゲーム) であるとき，すなわち，任意の $S, T \in 2^N$ に対して，

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$$

が成立するとき，コアが唯一の安定集合である，というものである．この結果を凸幾何上の協力ゲームに拡張する．凸幾何 $\mathcal{L}$ 上の協力ゲーム $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ が**準凸ゲーム** (あるいは，準優モジュラゲーム) であるとは，$S \cup T \in \mathcal{L}$ を満たす任意の $S, T \in \mathcal{L}$ に対して，

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$$

が成立することである．準凸ゲームの概念は [2] による．自明に，$\mathcal{L} = 2^N$ のときの準凸ゲームは凸ゲームである．

[定理] プレイヤーの集合 N 上の凸幾何 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$ 上の準凸ゲーム $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ を考える．このとき，安定集合は一意に定まり，それはコアと一致する．

参考文献

[1] J.M. Bilbao, *Cooperative games on combinatorial structures*, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht London, 2000.

[2] J.M. Bilbao, E. Lebrón and N. Jiménez, The core of games on convex geometries, *European Journal of Operational Research* **119**, 1999, 365–372.

[3] P.H. Edelman and R.E. Jamison, The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata* **19**, 1985, 247–270.

[4] U. Faigle and W. Kern, The Shapley value for cooperative games under precedence constraints, *International Journal of Game Theory* **21**, 1992, 249–266.

[5] B. Korte, L. Lovász and R. Schrader, *Greedoids*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.

[6] R.B. Myerson, Graphs and cooperation in games, *Mathematics of Operations Research* **2**, 1977, 159–176.

[7] L.S. Shapley, Cores of convex games, *International Journal of Game Theory* **1**, 1971, 11–26.