2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

捜索割当ゲームと均衡点

1504810 防衛大学校 ＊宝崎隆祐　　1000890 防衛大学校 飯田耕司

1．はじめに

捜索者の戦略が捜索資源の割当てであるような捜索者と逃避者が参加するゲームを“捜索割当ゲーム”と呼ぶ．捜索資源の最適配分問題は，捜索理論における捜索者側の一方的な最適化問題として多くの研究がある．捜索割当ゲームはその自然な形でのゲームへの拡張であるにもかかわらず，それほど研究は進展していない．さらに，これまでの研究 [4,2,3] のほとんどは離散捜索空間上でのモデルであり，解法上の困難さから連続空間の複雑なモデルに関する報告 [6] はあまりなされていない．一方，モデルが明確であること及び動的計画法等の手法が適用し易いことから，捜索者と逃避者が同じパス型の戦略をとるような少しだけ異なるモデルでのゲームには多くの研究がある [1,5]．この報告では，確率過程の観点から，捜索割当ゲームの離散モデルと連続モデルの均衡解の存在と関連性を調べる．

2．離散モデルと均衡点

次のような捜索者と逃避者が参加する２人ゼロ和ゲームを考える．

(1) 捜索空間は離散的なセル空間 $\mathbb{K}=\{1,\cdots,n\}$ と離散時点 $\mathbb{T}=\{1,\cdots,m\}$ からなる．

(2) 捜索者はこの捜索空間上へ量的に制約のある捜索努力を時点 τ 以降に配分することにより逃避者を探知しようと図る．時点 t，セル i に捜索者が投入する捜索努力量を $\varphi=\{\varphi(i,t),i\in\mathbb{K},t\in\mathbb{T}\}$ で表す．その実行可能領域 Ψ は有界な閉凸集合であるとする．例えば，$\sum_i\varphi(i,t)\le\Phi(t)$ や $\sum_t\sum_i\varphi(i,t)\le M$ の組合せ等である．

(3) 逃避者は自らがたどるパスを決定することにより捜索者からの逃避を図る．この離散捜索空間において考え得るパス全体を Ω で表すと，その総数は有限個 $|\Omega|=n^m$ あり，パス番号 $p=1,\cdots,n^m$ を付与できる．時点 t にパス p が通過するセルを $p(t)$ とする．パスにも何らかの制約 P があり，実行可能パス集合は $\widehat{\Omega}:=\Omega\bigcap P$ となる．

(4) 捜索者が捜索努力配分 φ を，逃避者がパス p を採った場合の逃避者から捜索者への支払いが $R(\varphi,p)$ である２人ゼロ和ゲームを考える．支払関数 $R(\varphi,p)$ は，変数 φ に関し連続かつ有限であると仮定する．

純粋戦略 φ，p に対する混合戦略を考えると，捜索者の任意の混合戦略は Ψ の凸性から再び Ψ の要素となるから，逃避者の $\widehat{\Omega}$ の要素に関する混合戦略 $\pi=\{\pi(p),p\in\widehat{\Omega}\}$，すなわち $\pi\in\Pi:=\{\pi|\pi(p)\ge0,p\in\widehat{\Omega},\sum_{p\in\widehat{\Omega}}\pi(p)=1\}$ のみを考慮すればよい．ここで，期待支払い $R(\varphi,\pi):=\sum_p\pi(p)R(\varphi,p)$ に対して定義されるマックス・ミン値 $\max_{\varphi\in\Psi}\min_{\pi\in\Pi}R(\varphi,\pi)$ とミニ・マックス値 $\min_{\pi\in\Pi}\max_{\varphi\in\Psi}R(\varphi,\pi)$ との均衡点に関して次が成り立つ（証明略）．

定 理 1　離散捜索割当ゲームには均衡解が存在する．

3．逃避者の連続移動に関する確率的性質

ここでは，地理空間 $\mathbb{K}=[0,K]$ と時間空間 $\mathbb{T}=[0,T]$ の直積で定義される連続捜索空間 $\mathbb{K}\times\mathbb{T}$ 上で，逃避者の移動に関する確率過程を考える．逃避者のパス集合を表す Borel 集合 Ω があり，その任意の部分集合 $\Omega_1\subseteq\Omega$ に対する確率測度 $\pi(\Omega_1)$ が定義されているとする．この連続モデル上で逃避者の各時刻 t での位置を確率過程 $\{Y_t\in\mathbb{K},t\in\mathbb{T}\}$ で，特にパス p の位置を $Y_t(p)$ で表す．便宜上，パスの実行可能条件を $B(Y_t)\ge0$ で表わそう．逃避者が有限な最大速度制約を持てば確率過程 Y_t は確率連続となるから，制約条件を満たすパスの確率測度に関して次式が成り立ち，離散時間上での確率的特性の同値性が言える．

$$Pr\{B(Y_t)\ge0,0\le t\le T\}=\lim_{m\to\infty}Pr\{B(Y_t)\ge0,t=kT/m,k=0,\cdots,m\}\,.$$

さらに，この m 離散時点で，セル１が地域 $C_1^n=[0,K/2^n]$ を，セル i が地域 $C_i^n=((i-1)K/2^n,iK/2^n]$，$i=2,\cdots,2^n$ を代表するように連続地理空間を 2^n 個に分割し，セル空間 $\widetilde{\mathbb{K}}=\{1,\cdots,2^n\}$ 上でのパスを考える．この離散空間上で定義されるパスの確率過程 $\{\widetilde{Y_t^n},t=1,\cdots,m\}$ は $\widetilde{Y_t^n}\in\widetilde{\mathbb{K}}$ でなければならないが，その確率測度を次式で定義する．

$$Pr\{\widetilde{Y_t^n}\} := Pr\{\bigcup\{p|Y_t(p) \in C^n_{\widetilde{Y_t^n}}\}\} . \tag{1}$$

すると，$Pr\{\widetilde{Y_t^n}\}$ の n に対する単調減少性等から $\lim_{n\to\infty} Pr\{\widetilde{Y_t^n}\} = Pr\{Y_t\}$ が証明できる．以上をまとめたのが次の定理である．

定 理 2 最大速度制約の下では，$n \times m$ 分割された離散捜索空間上での離散確率過程は，n, $m \to \infty$ の極限において，連続確率過程と同じ確率的特性をもつ．

Y_t の確率連続性から，サンプル・パス上での積分を含めこの確率過程から作成される様々な関数が確率変数になる．例えば，$Z_t = \alpha_{Y_t}\varphi(Y_t, t)$ は確率連続な確率過程となるため，$W = \int_{\boldsymbol{T}} Z_t dt$ が確率変数となる．したがって，一般的な狭義単調な連続関数 $g(\cdot)$ を用いた $g(W)$ も確率変数となり，その期待値 $R(\varphi, \pi) = E_W[g(W)]$ が定義できる．そこで，うまく $g(\cdot)$ を採ることにより，多くの捜索問題に対し連続捜索割当ゲームが定式化できる．例えば，ランダム捜索に対しては $g(W) = 1 - \exp(-W)$ がよく使われる．

4．連続ゲームの均衡解

連続捜索空間 $\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{T} = [0, K] \times [0, T]$ 上の点 (x, t) での捜索努力密度を $\varphi(x, t) \in \boldsymbol{R}$ で表す．その実行可能領域 Ψ は有界な閉凸集合であるとする．その例は，$\varphi(x, t) \geq 0$ や $\int_{\boldsymbol{K}} \varphi(x, t)dx \leq \phi(t)$, $\int_{\boldsymbol{T}}\int_{\boldsymbol{K}} \varphi(x, t)dxdt \leq M$ 等が考えられるであろう．逃避者の純粋戦略は，パス全体 Ω の中の実行可能条件 P を満たすパス群 $\widehat{\Omega}$ から 1 つのパス p を選択することである．P としては，最大速度制約：$dp(t)/dt \leq S$ や，速度 v に依存して消費率 $\mu(v)$ でエネルギー消費が伴う場合のエネルギー制約：$\int_{\boldsymbol{T}} \mu(dp(t)/dt)dt \leq E_0$ 等が考えられる．2 人のプレーヤの純粋戦略 φ, p に対する支払関数 $R(\varphi, p)$ は，通常，φ に対して連続で有限である．Ψ の凸性からパスに関する混合戦略 $\pi(p), p \in \widehat{\Omega}$ のみを導入すれば，戦略 φ, π に対する期待支払いは $R(\varphi, \pi) = \int_{\widehat{\Omega}} R(\varphi, p)\pi(p)dp$ と表される．

ここで，捜索空間を $n \times m$ 個に離散化する．パス全体は $|\Omega| = n^m$ 個のパスから成るが，全てのパスに 1 から n^m までパス番号をふる際，連続したパス番号をもつ 2 つのパスの間では 1 地点だけ通過セルが異なるようにすることができ，2 つのパス経路の差を高々パス番号の差で評価できる．すなわち，$||\{t \in \boldsymbol{T}|p_1(t) \neq p_2(t)\}|| \leq |p_1 - p_2|$ である．パス番号 $p = 1, \cdots, n^m$ をパス総数で割った値 $\omega := p/n^m$ をパス変数と名付けると，パス変数全体は，n, $m \to \infty$ の極限では区間 $[0, 1]$ で稠密な実数群を作ることになる．パス変数 ω をもつパスの時刻 t でのセルを $\omega(t)$ とし，支払関数 $R(\varphi, p)$ をあらためてパス変数で定義し直し $R(\varphi, \omega)$ と表記しよう．通常，$R(\varphi, \omega)$ は $\widetilde{\varphi}_\omega = \{\delta_{i\omega(t)}\varphi(i, t),\ i \in \boldsymbol{K},\ t \in \boldsymbol{T}\}$ の関数 $f(\widetilde{\varphi}_\omega)$ であり，$\widetilde{\varphi}_\omega$ に関してはリプシッツ条件を満たす．例えば，$\sum_t \varphi(\omega(t), t)$ や $1 - \exp(-\sum_t \alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t), t))$ はそうである．これらのことから，以下の不等式が異なる任意のパス変数 ω_1, ω_2 について成り立つ．

$$|R(\varphi, \omega_1) - R(\varphi, \omega_2)| \leq L \cdot F \cdot n^m |\omega_1 - \omega_2| . \tag{2}$$

L はリプシッツ乗数，F は有限値 $F := \sup_{i,t} |\varphi(i, t)|$ である．したがって，$n, m \to \infty$ の極限において，$R(\varphi, \omega)$ の $0 \leq \omega \leq 1$ に対する連続性が成り立つ．期待支払い $\int R(\varphi, \omega)\pi(\omega)d\omega$ の積分核 $R(\varphi, \omega)$ が連続であることは，この連続ゲームの均衡解の存在を証明するに十分である．また，その均衡解は離散モデルにおける均衡解の収束点と一致することも言える．

定 理 3 連続捜索割当ゲームは均衡解をもち，その離散モデルと連続モデルの間において，各々の実行可能性条件及び支払関数の間に適切な対応関係があれば，連続モデルの均衡解は離散モデルの均衡解の極限として与えられる．

5．数値例

紙数の関係上，数値例については発表会当日紹介する．

参考文献

[1] J.N. Eagle and A.R. Washburn, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495–510, 1991.

[2] R. Hohzaki and K. Iida, *JORSJ*, **41**(3), pp.294–320, 1998.

[3] R. Hohzaki and K. Iida, *EJOR*, **124**(1), pp.114–124, 2000.

[4] K. Iida, R. Hohzaki and S. Furui, *JORSJ*, **39**(4), pp.501–511, 1996.

[5] A.R. Washburn, *Ops. Res.*, **28**, pp.1290-1298, 1980.

[6] A.R. Washburn and R. Hohzaki, The Diesel Submarine Flaming Datum Problem, *MOR*, to appear.