マルコフ型到着流を持つ無限サーバ待ち行列の解析

申請中　京都大学大学院 情報学研究科　*増山 博之　MASUYAMA Hiroyuki
01306754　京都大学大学院 情報学研究科　滝根 哲哉　TAKINE Tetsuya

1. はじめに

現在までに、集団到着を許す無限サーバ待ち行列に対する研究は数多くなされており、系内客数に関する解析的結果が多数得られている。しかし、系内客数分布、あるいはその積率の数値計算手法に対する考察は、今までほとんどなされていない。本稿ではマルコフ型到着と相型サービスを持つ無限サーバ待ち行列の系内客数の二項積率の計算法を示す。

2. マルコフ型到着過程

到着流間に相関があり、なおかつ複数の到着流からの同時集団到着を許すマルコフ型到着過程を考える。以下では ν 番目の到着流から発生した客をクラス ν と呼び、クラスの集合 $\mathcal{K}$ は可算であると仮定する。また、$\mathcal{Z}$ と $\mathcal{Z}^+$ を次式で定義する。

$$\mathcal{Z} = \{\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots,); n_\nu = 0, 1, \ldots, \forall \nu \in \mathcal{K}\}$$
$$\mathcal{Z}^+ = \mathcal{Z} - \boldsymbol{0}$$

まず、状態集合 $\mathcal{M}$ を持つ既約で正再帰的な連続時間マルコフ連鎖が存在すると仮定する。このマルコフ連鎖は状態 $i \in \mathcal{M}$ に平均 μ_i の指数時間だけ留まった後、状態 $j \in \mathcal{M}$ に確率 $p_{i,j}$ で遷移する。状態 i から状態 j への遷移が起こった時、確率 $\sigma_{i,j}(\boldsymbol{n})$ $(\boldsymbol{n} \in \mathcal{Z})$ でクラス ν の客が n_ν 人到着する。ただし $\sigma_{i,j}(\boldsymbol{n})$ は $\sigma_{i,i}(\boldsymbol{0}) = 0$ $(\forall i \in \mathcal{M})$、$0 \le \sigma_{i,j}(\boldsymbol{n}) \le 1$, $(\forall i, j \in \mathcal{M}$, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathcal{Z})$ かつ次の制約を満たすとする。

$$\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{Z}} \sigma_{i,j}(\boldsymbol{n}) = 1, \quad \forall i, j \in \mathcal{M}$$

ここで、$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{n})$ $(\boldsymbol{n} \in \mathcal{Z}^+)$ は (i,j) 成分がそれぞれ

$$C_{i,j} = \begin{cases} -\mu_i & i = j \\ \mu_i p_{i,j} \sigma_{i,j}(\boldsymbol{0}) & i \ne j \end{cases}$$
$$D_{i,j}(\boldsymbol{n}) = \mu_i p_{i,j} \sigma_{i,j}(\boldsymbol{n})$$

で与えられる行列とする。このとき、到着過程を支配するマルコフ連鎖の無限小作用素は $\boldsymbol{C} + \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{Z}^+} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{n})$ となる。また、このマルコフ連鎖の定常状態確率ベクトルを $\boldsymbol{\pi}$ とする。クラス $\nu (\in \mathcal{K})$ の客のサービス時間は独立同一分布に従い、その分布関数を $H_\nu(t)$ とする。

この到着過程は、定常なマーク付き単純点過程を任意の精度で近似できる MAS (Markovian Arrival Streams) [2] を、同時集団到着を許すように拡張したものとなっている。

3. 行列結合二項積率

時刻 t におけるクラス ν の系内客数を $N_\nu(t)$ とし、系内客数に関する行列結合二項モーメントを $\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{m})$ $(\boldsymbol{m} \in \mathcal{Z}^+)$ とする。すなわち、$\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{m})$ の (i,j) 成分は次のようになる。

$$[\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{m})]_{i,j} = \mathrm{E}\left[\prod_{\nu \in \mathcal{K}} \binom{N_\nu(t)}{m_\nu} 1_{\{S_t = j\}} \middle| S_0 = i \right]$$

ただし、S_t は時刻 t での到着を支配するマルコフ連鎖の状態であり、$1_{\{\chi\}}$ は事象 χ の指示関数である。

Liu ら [1] の "条件付けの手法" を応用すると

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(t, \vec{\boldsymbol{l}}_k) = &\int_0^t d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \\ &\cdot \overline{H}^{(\boldsymbol{l}_k)}(\tau_k) \overline{H}^{(\boldsymbol{l}_{k-1})}(\tau_{k-1}) \cdots \overline{H}^{(\boldsymbol{l}_1)}(\tau_1) \\ &\cdot e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})(t-\tau_k)} \widehat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l}_k) e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})(\tau_k - \tau_{k-1})} \widehat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l}_{k-1}) \\ &\cdots e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})(\tau_2 - \tau_1)} \widehat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l}_1) e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\tau_1} \end{aligned} \tag{1}$$

を用いて $\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{m})$ は次式で与えられることが示される。

$$\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{m}) = \sum_{k=1}^{|\boldsymbol{m}|} \sum_{\vec{\boldsymbol{l}}_k \in \mathbb{L}_k(\boldsymbol{m})} \mathbb{F}(t, \vec{\boldsymbol{l}}_k), \tag{2}$$

ただし

$$\boldsymbol{l}_j = (l_{j,1}, l_{j,2}, \ldots) \in \mathcal{Z}^+, \quad \vec{\boldsymbol{l}}_k = (\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_k)$$
$$\overline{H}_\nu(t) = 1 - H_\nu(t)$$
$$\overline{H}^{(\boldsymbol{l})}(t) = \prod_{\nu \in \mathcal{K}} \overline{H}_\nu(t)^{l_\nu}, \quad \forall \boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots) \in \mathcal{Z}^+$$
$$\mathbb{L}_k(\boldsymbol{m}) = \left\{ \vec{\boldsymbol{l}}_k \mid \boldsymbol{l}_1 + \cdots + \boldsymbol{l}_k = \boldsymbol{m}, \boldsymbol{l}_j \in \mathcal{Z}^+ \right\}$$
$$\widehat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l}) = \sum_{\boldsymbol{n} \ge \boldsymbol{l} \in \mathcal{Z}^+} \prod_{\nu \in \mathcal{K}} \binom{n_\nu}{l_\nu} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{n}), \quad \forall \boldsymbol{l} \in \mathcal{Z}^+$$

である。従って、式 (2) より行列結合二項モーメントの数値計算は式 (1) で与えられる $\mathbb{F}_k(t, \vec{\boldsymbol{l}}_k)$ の数値計算を行うことと等価である。

特に、クラス ν の客数の平均 $\mathrm{E}[N_\nu(t)]$ と分散 $\mathrm{Var}[N_\nu(t)]$、及びクラス ν、η の客数に関する共分散 $\mathrm{Cov}[N_\nu(t), N_\eta(t)]$ は次のようになる。

$$\mathrm{E}[N_\nu(t)] = \boldsymbol{\alpha} \mathbb{F}_1(t, \boldsymbol{e}_\nu) \boldsymbol{e}$$
$$\mathrm{Var}[N_\nu(t)] = 2\boldsymbol{\alpha} \mathbb{F}_2(t, \boldsymbol{e}_\nu, \boldsymbol{e}_\nu)\boldsymbol{e} + 2\boldsymbol{\alpha}\mathbb{F}_1(t, 2\boldsymbol{e}_\nu)\boldsymbol{e} + \mathrm{E}[N_\nu(t)] - \mathrm{E}[N_\nu(t)]^2$$
$$\mathrm{Cov}[N_\nu(t), N_\eta(t)] = \boldsymbol{\alpha}\mathbb{F}_2(t, \boldsymbol{e}_\nu, \boldsymbol{e}_\eta)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\alpha}\mathbb{F}_2(t, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\nu)\boldsymbol{e} - \mathrm{E}[N_\nu(t)]\mathrm{E}[N_\eta(t)]$$

ただし、$\boldsymbol{\alpha}$ は到着を支配するマルコフ連鎖の初期状態確率ベクトル、$\boldsymbol{e}$ を全ての成分が 1 の列ベクトルとし、$\boldsymbol{e}_\nu$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{e}_\nu = (0, \ldots, \underset{\nu\mathrm{th}}{0, 1}, 0, \ldots,)$$

4. 相型サービスに対する数値計算法

以下では各クラスのサービス時間分布は表現 $(\boldsymbol{\beta}_\nu, \boldsymbol{T}_\nu)$ をもつ相型であるとする。よって各クラスのサービス時間の補分布は次式で与えられる。

$$\overline{H}_\nu(t) = \boldsymbol{\beta}_\nu e^{\boldsymbol{T}_\nu t}\boldsymbol{e}, \quad \forall\nu \in \mathcal{K} \tag{3}$$

ここで、$\boldsymbol{\beta}^{<\boldsymbol{l}>}$ 及び $\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}]}$ $(\boldsymbol{l} \in \mathcal{Z}^+)$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\beta}^{<\boldsymbol{l}>} = \underbrace{\boldsymbol{\beta}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\beta}_1}_{l_1} \otimes \underbrace{\boldsymbol{\beta}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\beta}_2}_{l_2} \otimes \cdots,$$

$$\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}]} = \underbrace{\boldsymbol{T}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{T}_1}_{l_1} \oplus \underbrace{\boldsymbol{T}_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{T}_2}_{l_2} \oplus \cdots$$

このとき式 (1) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_k(t, \vec{\boldsymbol{l}}_k) \\
&= \prod_{i=1}^{k} b(\boldsymbol{l}_i)d(\boldsymbol{l}_i)\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})^{-1} \left[\int_0^t du_k \int_0^{u_k} du_{k-1} \right. \\
&\quad \cdots \int_0^{u_2} du_1 \prod_{j=1}^{k} \boldsymbol{\kappa}^{(\boldsymbol{l}_j)} \exp\left[\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}_j]}u_j\right] \left(-\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}_j]}\boldsymbol{e}\right) \\
&\quad \cdot e^{\boldsymbol{Q}^- u_1}\widehat{\boldsymbol{D}}^-(\boldsymbol{l}_1)e^{\boldsymbol{Q}^-(u_2-u_1)}\widehat{\boldsymbol{D}}^-(\boldsymbol{l}_2) \\
&\quad \left. \cdots\cdot e^{\boldsymbol{Q}^-(u_k-u_{k-1})}\widehat{\boldsymbol{D}}^-(\boldsymbol{l}_k)e^{\boldsymbol{Q}^-(t-u_k)} \right]^T \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})
\end{aligned}$$

ただし、$\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})$ はその (i,i) 要素がベクトル $\boldsymbol{\pi}$ の i 番目の要素に等しい対角行列であり、$\boldsymbol{Q}^-$ 及び $\widehat{\boldsymbol{D}}^-(\boldsymbol{l})$ は $\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})^{-1}\widehat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l})^T\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})$ の行和の最大値 $d(\boldsymbol{l})$ を用いて次式で与えられる。

$$\boldsymbol{Q}^- = \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})^{-1}\left(\boldsymbol{C} + \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{Z}^+} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{n})\right)^T \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}^-(\boldsymbol{l}) = d(\boldsymbol{l})^{-1}\,\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})^{-1}\,\widehat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l})^T\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})$$

さらに、$b(\boldsymbol{l})$ 及び $\boldsymbol{\kappa}^{(\boldsymbol{l})}$ は次式で与えられる。

$$b(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{\beta}^{<\boldsymbol{l}>}(-\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}]})^{-1}\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{\kappa}^{(\boldsymbol{l})} = b(\boldsymbol{l})^{-1}\boldsymbol{\beta}^{<\boldsymbol{l}>}(-\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}]})^{-1}$$

クロネッカー積及び和の性質を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_k(t, \vec{\boldsymbol{l}}_k) \\
&= \prod_{j=1}^{k} b(\boldsymbol{l}_j)d(\boldsymbol{l}_j)\cdot\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})^{-1}\left[\boldsymbol{J}_k(\vec{\boldsymbol{l}}_k)\int_0^t du_k \right. \\
&\quad \cdot\int_0^{u_k} du_{k-1}\cdots\int_0^{u_2} du_1 \exp\left[\boldsymbol{U}_k^{(1)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k)u_1\right] \\
&\quad \cdot\boldsymbol{V}_k^{(1)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k)\exp\left[\boldsymbol{U}_k^{(2)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k)(u_2-u_1)\right] \\
&\quad \cdots\cdot\boldsymbol{V}_k^{(k-1)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k)\exp\left[\boldsymbol{U}_k^{(k)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k)(u_k-u_{k-1})\right] \\
&\quad \left.\cdot\boldsymbol{V}_k^{(k)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k)\exp\left[\boldsymbol{Q}^-(t-u_k)\right]\right]^T \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{I}_Q$ は $\boldsymbol{Q}^-$ と同じサイズの単位行列であり、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_k(\vec{\boldsymbol{l}}_k) &= \boldsymbol{\kappa}^{(\boldsymbol{l}_1)} \otimes\cdots\otimes \boldsymbol{\kappa}^{(\boldsymbol{l}_k)} \otimes \boldsymbol{I}_Q, \\
\boldsymbol{U}_k^{(j)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k) &= \boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}_j]} \oplus\cdots\oplus \boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}_k]} \oplus \boldsymbol{Q}^-, \\
\boldsymbol{V}_k^{(j)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k) &= (-\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}_j]})\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{I}_{k-j}(\boldsymbol{l}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{l}_k) \otimes \widehat{\boldsymbol{D}}^-(\boldsymbol{l}_j)
\end{aligned}$$

である。ただし $\boldsymbol{I}_{k-j}(\boldsymbol{l}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{l}_k)$ は $k-j>0$ のとき $\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}_{j+1}]}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{T}^{[\boldsymbol{l}_k]}$ と同じサイズの単位行列、$k-j=0$ のとき 1 とした。

補題 1. $\boldsymbol{U}_j$ $(j=1,\ldots,k+1)$ 及び $\boldsymbol{V}_j$ $(j=1,2,\ldots,k)$ は有限の成分を持つ行列とする。このとき次式が成り立つ。ただし、$\boldsymbol{I}$ は適当なサイズの単位行列とする。

$$\begin{aligned}
&\int_0^t du_k \int_0^{u_k} du_{k-1}\cdots\int_0^{u_2} du_1 e^{\boldsymbol{U}_1 u_1}\boldsymbol{V}_1 e^{\boldsymbol{U}_2(u_2-u_1)} \\
&\qquad \cdots\cdot e^{\boldsymbol{U}_k(u_k-u_{k-1})}\boldsymbol{V}_k e^{\boldsymbol{U}_{k+1}(t-u_k)} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot\exp\left[\begin{pmatrix}
\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{V}_2 & \cdots & \boldsymbol{O} \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \\
\boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_k & \boldsymbol{V}_k \\
\boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_{k+1}
\end{pmatrix} t\right]\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} \\ \vdots \\ \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

上の補題を用いると $\boldsymbol{F}_k(t, \vec{\boldsymbol{l}}_k)$ は次のような行列指数関数形で表現できることが示される。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_k(t, \vec{\boldsymbol{l}}_k) = \prod_{j=1}^{k} b(\boldsymbol{l}_j)d(\boldsymbol{l}_j)\,\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})^{-1} \\
&\quad \cdot\left[\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_k(\vec{\boldsymbol{l}}_k) & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \exp\left(\boldsymbol{A}_k(\vec{\boldsymbol{l}}_k)t\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} \\ \vdots \\ \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{I}_Q \end{bmatrix}\right]^T \\
&\quad \cdot\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\pi})
\end{aligned} \tag{4}$$

ただし $\boldsymbol{A}_k(\vec{\boldsymbol{l}}_k)$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{A}_k(\vec{\boldsymbol{l}}_k) = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{U}_k^{(1)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k) & \boldsymbol{V}_k^{(1)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k) & & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \ddots & \ddots & \\
\vdots & & \boldsymbol{U}_k^{(k)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k) & \boldsymbol{V}_k^{(k)}(\vec{\boldsymbol{l}}_k) \\
\boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^-
\end{pmatrix}$$

式 (4) に現れる行列指数の中にある行列 $\boldsymbol{A}_k(\vec{\boldsymbol{l}}_i)$ は、(defective な) 吸収マルコフ連鎖の無限小作用素となっている。従って、一様化手法を用いると、式 (4) における行列指数関数は容易に数値計算できる。

参考文献

[1] L. Liu and J.G.C. Templeton, The $GR^{X_n}/G_n/\infty$ system: system size, QUESTA 8 (1991) 323–356.

[2] S. Asmussen and G. Koole, Marked point process as limits Markovian arrival streams, JAP 30 (1993) 365–372.