2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

M凸関数の最小化に対するスケーリングアルゴリズムとその実験的評価

02602360 上智大学 *森口 聡子 MORIGUCHI Satoko
01603194 京都大学 室田 一雄 MUROTA Kazuo
01207070 上智大学 塩浦 昭義 SHIOURA Akiyoshi

1 はじめに

M凸関数は, 整数格子点上で定義された関数のクラスとして, 1996年に室田 [1, 2] により提案された概念である. その後の研究により, M凸関数は離散凸関数として相応しい諸性質を満たすことが示された. また, M凸性は様々な状況で現れる実に自然な概念である. 線形関数や分離凸関数はM凸関数であるし, もっと一般的には費用関数が分離凸関数である最小費用流問題でもM凸関数が現れる.

本稿では, M凸関数の最小化問題について考える. 貪欲算法 (降下法) を用いてM凸関数を最小化することができるが, 最急降下法を用いると擬多項式時間で終了することが知られている. また, 多項式時間算法が提案されているが [4], 効率的なアルゴリズムとは必ずしも言えず, 実用的にも遅いことが実験的に知られている. 本稿では, スケーリング技法を適用することによりM凸関数の最小化アルゴリズムの効率化を行う. スケーリングは擬多項式時間算法を多項式時間算法に効率化するための基本的な技法であり, 資源配分問題や最小費用流問題などに対して適用されており, 成功を収めている. 一般にM凸関数はスケーリングに関して閉じていないが, 様々なクラスのM凸関数がスケーリングに関して閉じている. このようなクラスのM凸関数に対し, 最急降下法とスケーリング技法を組み合わせた効率的な算法を提案する.

2 M凸関数とスケーリング

V を有限集合とする. 関数 $f : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ がM凸関数であるとは, f が交換公理 (M-EXC) を満たすことである.

(M-EXC) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$ such that

$$f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v).$$

ここで, $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid f(x) < +\infty\}$,

$$\mathrm{supp}^+(x-y) = \{w \in V \mid x(w) > y(w)\},$$
$$\mathrm{supp}^-(x-y) = \{w \in V \mid x(w) < y(w)\}$$

であり, $\chi_w \in \{0,1\}^V$ は $w \in V$ の特性ベクトルとする.

正の整数 α とベクトル $b \in \mathbf{Z}^V$ に対して, $f^{\alpha,b} : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$f^{\alpha,b}(x) = f(\alpha x + b) \qquad (x \in \mathbf{Z}^V)$$

と定義する. この操作をスケーリングと呼ぶ. 一般に f がM凸関数であっても $f^{\alpha,b}$ はM凸関数とは限らない. しかし, 下記に述べるクラスのM凸関数はスケーリングについて閉じている.

例 2.1 (分離凸関数) 各 $i = 1, \cdots, n$ に対し, $f_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は凸関数とする. β を任意の整数とするとき, 次の関数はM凸関数である.

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) & \text{if } \ x(V) = \beta, \\ +\infty & \text{その他.} \end{cases}$$

例 2.2 (2次のM凸関数) $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ を対称行列とするとき, 2次関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^T A x & \text{if } x(V) = 0, \\ +\infty & \text{その他.} \end{cases}$$

がM凸関数となるための必要十分条件は, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$ なる任意の $i,j,k,l \in V$ に対して $a_{ij} + a_{kl} \geq \min(a_{ik} + a_{jl}, a_{il} + a_{jk})$ が成り立つことである [3].

例 2.3 (ツリー型関数) V の部分集合の族 $\mathcal{T}$ は, 任意の $X, Y \in \mathcal{T}$ に対して $X \cap Y = \emptyset$ または $X \subseteq Y$, または $X \supseteq Y$ を満たすとき, 層族と呼ばれる. 層族 $\mathcal{T}$ の各要素 $X \in \mathcal{T}$ に対して凸関数 $f_X : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が与えられていると仮定し, β を任意の整数とする. このとき, 次の関数はM凸である.

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{X \in \mathcal{T}} f_X(x(X)) & \text{if } \ x(V) = \beta, \\ +\infty & \text{その他.} \end{cases}$$

3 M凸関数の最小解の性質

本稿で提案する算法は, M凸関数の大域的な最小性は局所的な最小性で保証されることと, α 局所最小解の近傍に大域的な最小解が存在するという事実を利用した算法である.

関数 f の最小値集合を $\arg\min f$ で表す. 以下, $f:\mathbf{Z}^V \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ はM凸関数とする.

定理 3.1 (室田 [1, 2]) 任意の $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対し, $f(x) \le f(y)\ (\forall y \in \mathbf{Z}^V) \Longleftrightarrow f(x) \le f(x-\chi_u+\chi_v)\ (\forall u,v \in V)$.

定理 3.2 (塩浦 [4]) $x \in \mathrm{dom}\, f$ は f の最小解でないとし, $u,v \in V$ は $f(x-\chi_u+\chi_v) = \min_{s,t\in V} f(x-\chi_s+\chi_t)$ を満たすとする. このとき, $x_*(u) \le x(u)-1$, $x_*(v) \ge x(v)+1$ を満たす $x_* \in \arg\min f$ が存在する.

$x_\alpha \in \mathrm{dom}\, f$ に対し, $f(x_\alpha) \le f(x_\alpha + \alpha(\chi_v - \chi_u))\ \ (\forall u,v \in V)$ が成り立つとき, x_α を f の α 局所最小解と呼ぶ. 次の定理は, α 局所最小解の近傍にM凸関数の最小解が存在することを示している.

定理 3.3 α は任意の正の整数とする. $x_\alpha \in \mathrm{dom}\, f$ は $f(x_\alpha) \le f(x_\alpha+\alpha(\chi_v-\chi_u))\ (\forall u,v \in V)$ を満たすとする. このとき, $\arg\min f \neq \emptyset$ であり,

$$|x_\alpha(v) - x_*(v)| \le (n-1)(\alpha-1) \qquad (v \in V)$$

を満たす $x_* \in \arg\min f$ が存在する.

4 アルゴリズム

以下, f は $\mathrm{dom}\, f$ が有界なM凸関数とする.

算法 Steepest_Descent
手順 0: x を $\mathrm{dom}\, f$ に含まれる任意のベクトルとし, $B := \mathrm{dom}\, f$ とおく.
手順 1: もし $f(x) = \min_{s,t\in V} f(x-\chi_s+\chi_t)$ ならば終了. x は f の最小解.
手順 2: $x-\chi_u+\chi_v \in B$ かつ
$f(x-\chi_u+\chi_v)$
$= \min\{f(x-\chi_s+\chi_t) \mid s,t \in V,\ x-\chi_s+\chi_t \in B\}$
なる $u,v \in V$ を見つける.
手順 3: $x := x-\chi_u+\chi_v$,
$B := B \cap \{y \in \mathbf{Z}^V \mid$
$y(u) \le x(u)-1, y(v) \ge x(v)+1\}$
とおく. 手順 1 へ戻る. □

最急降下法は $n = |V|, L = \max\{\|x-y\|_\infty \mid x,y \in \mathrm{dom}\, f\}$ とおくと, $\mathrm{O}(n^3 L)$ 時間で最小解を求める擬多項式時間算法である.

次に, スケーリング技法を用いた効率的な算法を提案する. f はスケーリングに関して閉じているM凸関数と仮定する.

算法 Scaling_Steepest_Descent
手順 0: $\alpha := 2^{\lceil \log(L/4n) \rceil}$, $B := \mathrm{dom}\, f$ とおく. $x_{2\alpha}$ を $\mathrm{dom}\, f$ に含まれる任意のベクトルとする.
手順 1: [α スケーリングフェイズ]
関数 $\tilde{f}: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ を次のように定め, その最小解 y_* を Steepest_Descent により求める.

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(x_{2\alpha}+\alpha y) & \text{if } x_{2\alpha}+\alpha y \in B, \\ +\infty & \text{if } x_{2\alpha}+\alpha y \notin B. \end{cases}$$

$x_\alpha = x_{2\alpha} + \alpha y_*$ とおく.
手順 2: $\alpha = 1$ ならば終了. x_α は f の最小解.
手順 3:
$B := B \cap \{y \in \mathbf{Z}^V \mid$
$|y(w) - x_\alpha(w)| \le (n-1)(\alpha-1)\ (v \in V)\}$,
$\alpha := \alpha/2$ とおく. 手順 1 へ戻る. □

算法 Scaling_Steepest_Descent は手順 1 を $\lceil \log L/(4n) \rceil$ 回実行する. 手順 3 での B の決め方により, 手順 1 の実行時間は $\mathrm{O}((4n\alpha \times n)/\alpha \times n^2) = \mathrm{O}(n^4)$ となる. また, 値 L は $\mathrm{O}(n^2 \log L)$ 時間で計算できる. よって, 次の結果を得る.

定理 4.1 $\mathrm{dom}\, f$ に含まれるベクトルが与えられているならば, Scaling_Steepest_Descent はスケーリングに関して閉じているM凸関数 f の最小解を $\mathrm{O}(n^4 \log(L/n))$ 時間で求める.

参考文献

[1] K. Murota, Convexity and Steinitz's exchange property, Adv. Math. 124 (1996) 272–311.

[2] K. Murota, Discrete convex analysis, Math. Prog. 83 (1998) 313–372.

[3] K. Murota, A. Shioura, Characterizations of quadratic M-convex and L-convex functions, in preparation.

[4] A. Shioura, Minimization of an M-convex function, Discrete Appl. Math. 84 (1998) 215–220.