2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

最小拘束問題の下界値改善と分枝限定法

02103380 防衛大学校情報工学科 加治屋政誉司 KAJIYA Masayoshi
01107880 防衛大学校情報工学科 片岡 靖詞 KATAOKA Seiji
02203020 防衛大学校情報工学科 *坂森 義成 SAKAMORI Yoshinari

1 はじめに

教官集合を M ($|M| = m$)，学生集合を N ($|N| = n$) とする．各学生には複数の指導教官がおり，その対応は図1のような0-1行列で表現できる．卒論発表会において，各教官は，最初の担当学生の発表開始から最後の担当学生の発表終了まで拘束される．このとき，学生の発表順序をスケジュール（列交換）し（図2），教官の総拘束時間を最小化する問題を**最小拘束問題**（Minimum Binding Problem: MBP）と呼ぶことにする．

時限 学生	1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	6 6	7 7	8 8	9 9	10 10	拘束 時間
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	7
教 2	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	10
官 3	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	9
4	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	10

図 1: スケジュール前・総拘束時間 36

時限 学生	1 2	2 3	3 4	4 8	5 7	6 1	7 5	8 10	9 6	10 9	拘束 時間
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	5
教 2	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	5
官 3	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	6
4	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	8

図 2: 最適スケジュール後・総拘束時間 24

MBP に対しては，動的計画による厳密解法が報告されている [1] が，解ける問題の規模に限界がある（$n \le 25$ くらい．$m \le 4$ であれば n は十分大きくてもよい）．また，下界値算法としては最遅拘束開始問題を用いた手法が考えられている [2]．本研究では [2] の下界値を強化するため及び分枝限定法に直結できるように，学生を前半・後半に固定する下界値算法について報告する．

2 最遅拘束開始問題による下界値 [2]

教官の拘束開始時限のみに注目し，それを最も遅くする問題を**最遅拘束開始問題**（Latest-Start Binding Problem: LSBP）と呼ぶ．LSBP の目的関数は拘束が始まる前の0の数の最大化（図3参照）とし，最適値を LS とすると，次式 (1) は MBP の下界値を与える．

$$mn - 2LS \tag{1}$$

LSBP では，ある解をもとに教官を拘束開始順に入れ換えても一般性を失うことはなく，その結果，図3のように 0-1 行列を拘束開始時限を境にブロック対角化することができる．また，これらのうち任意の連続

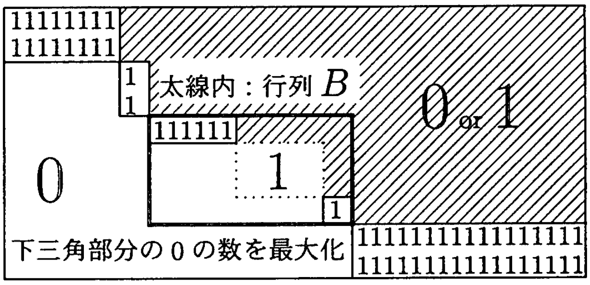

図 3: 教官を拘束開始順に並べる

するブロック対角化成分から誘導される部分 0-1 行列を B（図3太線）とすると，LSBP の最適解には，次の性質が成り立つ．

1. ブロック対角成分の要素はすべて 1 である．
2. 部分行列 B で独立に LSBP を解いた最適解は，もとの行列での LSBP の最適解（B 内）と一致する．

これらの性質より，拘束開始の遅い順に教官を定めながら LSBP の厳密解を求める DP 解法（DP-LS）が構築できる．集合 $T(\subseteq M)$ を教官の部分集合，$g(T)$ を教官集合 T における LSBP の最適値とする．このとき，漸化式 (2) が成り立つ．

$$g(T) = \max_{t \in T}\{g(T \setminus \{t\})\} + d(T) \tag{2}$$

$d(T)$ は教官集合 T で担当しない学生数であり，初期値は $g(\emptyset) = 0$ とすればよい．増分 $d(T)$ は T によって定数なのでプログラム化も簡単であり，DP-LS を用いれば，教官数 15 くらいであれば，学生数にほとんど依存せず，最適値を求めることができる．例えば，図1の場合，最適順序（値）は [2 3 4 8 10 1 5 6 7 9]（$LS = 9$）であり，(1) 式から計算される下界値は 22 となる．

3 学生の前半・後半固定 [3]

MBP の解は順序を逆にしても等価なので，特定の学生ひとりを前半に固定しても一般性を失うことはない．したがって，ある学生ひとりを必ず前半に入るように固定した LSBP と，後半に固定した LSBP（前半に固定した最早拘束終了問題と同義）を考えることにより，

(1) 式を利用すれば，さらに強化した下解値を得ることができる．

例えば，図 1 で学生 1 を前半に固定した LSBP の解（値）は [2 3 4 8 1 | 10 5 6 7 9]（$LS = 8$）であり，後半に固定した解（値）は [2 3 4 8 10 | 1 5 6 7 9]（$LS = 9$）となるので，下界値としては 23 を得る．

また，分枝限定法への展望を考え，学生 1,2 を同時に固定する LSBP を考える．このとき，前半固定の解（値）は [**2** 3 4 8 **1** | 10 5 6 7 9]（$LS = 8$），後半固定の解（値）は [9 5 6 10 3 | 4 **1** **2** 7 8]（$LS = 7$）となるので，下界値として 25 を得ることになり，仮に近似解法で 24 を得ていれば，このような固定は分枝限定法の枠組内で見切ることができる．したがって，前半・後半に固定することは，学生を時限に割り当てなくても**有効な分枝方法のひとつ**と考えることができる．

前半，後半の区切りとなる時限を $\bar{k}$ ($\geq \lceil n/2 \rceil$) とし，1 時限目から $\bar{k}$ 時限目までを前半，$n - \bar{k} + 1$ 時限目から n 時限目までを後半とする．ここでは，簡単のため $\bar{k} = \lceil n/2 \rceil$ とし，$\bar{k} + 1$ 時限目から後半と記述する．

3.1 学生集合 S_F の前半固定

学生集合 $S_F (\subseteq N)$ を前半に固定する場合を考える．DP-LS で，ある教官集合 T の状況を考える場合，S_F の割り当てられ方は次の 2 ケースに大別される．

ケース 1：DP-LS では，後半に S_F に属する学生がひとりも入ってこない場合．

ケース 2：DP-LS では，後半の時限に S_F のうち一部の学生 $S_{f_T} (\subseteq S_F)$ が発表することになる場合．

ケース 1 の場合は，S_F に属する学生は必然的に全員前半に入ることになるので，DP-LS をそのまま続ければよい．ケース 2 の場合，後半の時限に発表することになる学生を S_{f_T} とすると，最適解の性質として次の定理 1,2 が成り立つ

定理 1 （ケース *2* の場合）最適解において，S_{f_T} に属する学生は時限 $\bar{k} - |S_{f_T}| + 1$ から $\bar{k}$ の間に連続して発表する．(証明は *[3]*) ■

定理 2 （ケース *2* のとき）学生 S_{f_T} で拘束されるブロックを含む，連続するブロックで誘導される部分行列において独立に，学生集合 S_{f_T} を前半に固定する最遅拘束開始問題を考える．このとき，独立した部分問題における最適解と，もとの問題における最適解に該当する部分とは一致する．ただし，前半・後半の境は相対的に変化するものとする．(証明は *[3]*) ■

3.2 学生集合 S_L の後半固定

学生集合 $S_L (\subseteq N)$ を後半に固定する場合を考える．この場合も DP-LS で，ある教官集合 T の状況下で，S_L の割り当てられ方は次の 2 ケースに大別される．

ケース 1：DP-LS により，後半に S_L に属する学生をすべて発表させることができる場合．

ケース 2：DP-LS により，後半の時限に S_L の一部の学生 ($S_{\ell_T} \subseteq S_L$) を発表させられない場合．

このときも，ケース 1 の場合は S_L に属する学生は全員後半に発表させることができるので，DP-LS をそのまま続けていけばよい．ケース 2 の場合，後半に発表させることができなくなってしまう学生 S_{ℓ_T} とすると，最適解の性質として定理 3 が成り立つ

定理 3 （ケース *2* の場合）最適解において，S_{ℓ_T} に属する学生は $\bar{k} + 1$ 時限目から $\bar{k} + |S_{\ell_T}|$ 時限目の間に連続して発表する．(証明は *[3]*) ■

3.3 学生集合 S_F, S_L の同時固定

定理 1,2,3 より，S_F, S_L を同時に各々前半・後半に固定する場合でも $g(T)$ の計算には (2) 式における増分 $d(T)$ を工夫するだけでよく，その計算方法を T の関数で定義できるよう以下のように設定すればよい．ここで現在の状態を示す教官集合を T，教官集合 T で担当する学生集合を S_T，さらに，S_T 中の前半固定の学生集合を S_{f_T}，$N \setminus S_T$ 中の後半固定の学生集合を S_{ℓ_T}，$k_T = n - |S_T| + |S_{f_T}|$，$k_s = k_T - \bar{k}$ とする．

- $k_T > \bar{k}$ のとき，

$$d(T) = \begin{cases} k_T & S_{f_T} = \emptyset \text{ かつ } k_s \geq |S_{\ell_T}| \\ \bar{k} - |S_{f_T}| & S_{f_T} \neq \emptyset \text{ かつ } k_s \geq |S_{\ell_T}| \\ k_T - |S_{f_T}| - |S_{\ell_T}| & k_s < |S_{\ell_T}| \end{cases}$$

- $k_T \leq \bar{k}$ のとき，$d(T) = k_T - |S_{f_T}| - |S_{\ell_T}|$

4 分枝限定法への展望と課題

提案した手法を分枝限定法に組み込むためには，分枝ルール等の他にも，図 1 の学生 3,4 のように同じ指導パターンを持つ学生は連続する [1] などの性質も考慮すべきである．さらに，疎問題に対しては，前半・後半に固定する方法だけでは，仮に最適に固定されていても下界値と最適値が一致しないこともあるなど，いくつかの解決すべき問題点が残されている．

計算機実験等については，当日報告する予定である．

参考文献

[1] 加治屋他: MBP の DP 解法. OR 学会 2000 春,26-27.
[2] 加治屋他: MBP の下界値. OR 学会 2000 秋,26-27.
[3] 加治屋: MBP の解法 —. 防衛大修士論文 (2001).