2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

連続的利用者分布とネットワーク単一施設配置モデル

02302320　筑波大学　社会工学研究科　*田村一軌　TAMURA Kazuki
01102840　筑波大学　社会工学系　腰塚武志　KOSHIZUKA Takeshi
01009480　筑波大学　社会工学系　大澤義明　OHSAWA Yoshiaki

1. はじめに

これまで道路網を利用した施設配置モデルでは，利用者がネットワークのノード (交差点) のみに存在すると考え分析することがほとんどであった．しかし現実の利用者はリンク (道路) に沿って存在しているとしたほうがよい場合も多い．そこで本稿では利用者がネットワーク上に連続的に分布する場合のネットワーク施設配置モデルを考察する．特にすべての利用者と施設との距離距離の総和を最小にする施設立地点 (メディアン) と，施設から最も遠い利用者までの距離を最小にする施設立地点 (センター) を求める方法を示す．

本稿では，利用者はネットワーク上で一様に分布するものとし，また距離はすべて最短距離であると仮定する．

2. ミニ・サム（メディアン）問題

ノード $v_1,\ldots,v_n$ リンク $e_1,\ldots,e_m$ からなるネットワーク N を考える．ネットワーク上の2点 x,y の間の距離を $d(x,y)$ と表す．このときミニ・サム問題は以下のように定式化できる．

$$\min_{z\in N}\phi(z)=\int_{x\in N}d(z,x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

Hakimi はネットワークのノードのみに施設利用者が存在するとき，メディアンの1つがノードにあることを示した (Hakimi の定理，文献 [1])．利用者がネットワーク上に一様に存在する場合には，この Hakimi の定理から以下の性質が成り立つ．

性質　メディアンはブリッジもしくはノードに存在する．

証明　ブリッジでないリンク e に対し，その両端のノードを s,t とする．ネットワークから e を取り除いたとき，s と t との間に必ず (最短) 経路 P が存在する．e と P によってサーキット C が形成される．C にいる利用者だけに注目すると施設の位置は C 上で無差別である．C 以外の利用者は施設まで到達するのに C 上にあるいずれかのノードを経由するので，Hakimi の定理より最適点はノードに存在する．結局，C 上にあるノードが e 上の任意の点より優れる．□

この性質をもとに以下の多項式算法が提案できる．ブリッジであるリンク e の両端のノードを s,t，$d(s,t)=\ell$ とする．e を除去したとき s と連結する利用者数を w_s，t と連結する利用者の数を w_t とすると，

$$w_s+x=\ell-x+w_t \tag{2}$$

を満たす $x(0\le x\le\ell)$ が存在すれば x が最適点となる．他の場合には，すべてのノードで目的関数 $\phi(z)$ を評価し，値が最小となるノードがメディアンとなる．

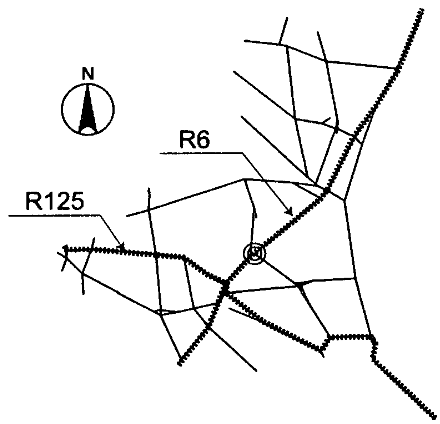

図 1: 茨城県国道網

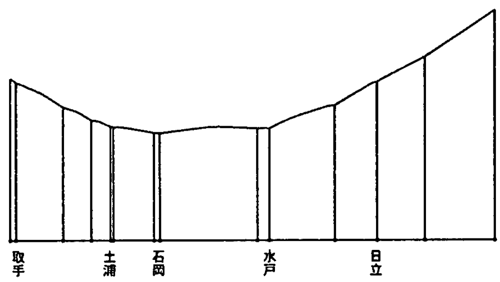

図 2: 国道 6 号における目的関数値

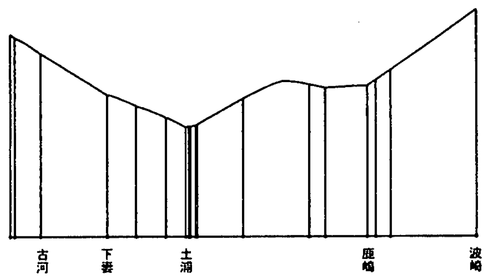

図 3: 国道 125 号における目的関数値

次に実際の道路網を用いた計算例を示す．図1は茨城県内の国道からなるノード数 82 およびリンク数 108 のネットワークである．上記の算法により求められたメディアンは図中◎で示す地点 (石岡市付近) になった．また茨城県内を縦断する6号線と横断する 125 号線をそれぞれ取り出し，目的関数 $\phi(z)$ の変化を表したものが図2，図3である．これをみると，$\phi(z)$ は全体としては下に凸の関数のような傾向を示しているが，細かく見るといくつかのリンク上では上に凸となるのが見て取れる．

3. ミニ・マックス（センター）問題

ミニ・マックス問題は以下のように定式化できる．

$$\min_{z \in N} \phi(z) = \max_{x \in N} d(z, x) \tag{3}$$

この問題の最適点は絶対センターと呼ばれ，ノードのみに利用者が分布するときの解法としては Kariv and Hakimi の解法が知られている (文献 [2])．この方法は，各リンクに対し最遠ノードまでの距離を最小にする地点 (局所的最適点) を求め，最終的に (大域的) 最適点を得るものである．

利用者がネットワーク上に連続的に分布する場合にもこの解法を応用した以下の多項式算法が提案できる．

リンク e_i 上の点 z からみて，e_j 上の点の中でもっとも遠い地点までの距離 $\psi_j(z)$ を求める．

$$\psi_j(z) = \max_{x \in e_j} d(z, x) \tag{4}$$

これをすべての j について求め，1 つの図中に重ね描いた上で，それらの上側包絡線をとればそれが e_i における $\phi(z)$ である．つまり

$$\phi(z) = \max_{j} \psi_j(z) \tag{5}$$

である．これをすべてのリンクについて求め，ネットワーク全体の中で $\phi(z)$ が最小となる地点 z を見つければそれが絶対センターである．

さて，$\psi_j(z)$ の求め方だが，e_i と e_j の組み合わせによっていくつかの場合分けが必要となる．e_i 上の点を x，e_j 上の点を y とするとき，x と y の位置によって移動経路が異なってくるためである．その場合分けは文献 [4] による方法を応用することができる．これによると，リンクの組み合わせはその間に存在する経路の数などによって 5 つの場合にに分けられるが，組み合わせごとにうまくリンクを細分化することで次の 2 つのパターンに帰着できることが分かっている．1 つはリンク間の経路が 1 つしかないもの，もう 1 つは互いに長さの等しいリンクの両端間が互いに長さの等しい経路で結ばれているものである．

図 4，図 5 はそれぞれ 2 つのパターンにおける 2 リンクの関係とその時の $\psi_j(z)$ の形状を図示したものである．図 4 の場合には $s-t$ 間のすべての地点において最遠点は u であるので，このときの $\psi_j(z)$ は $\psi_j(s) = d + l_2$ から線形で増加し $\psi_j(t) = d + l_1 + l_2$ となるような関数になる．一方図 5 の場合には，$s-t$ 間の任意の地点 x において s, t どちらを経由しても等距離になる点 x' が存在し，かつこれが x からみて最遠点である．この場合の $\psi_j(z)$ は $\psi_j(x) = d + l$ で一定である．

細分化したリンクをもとに戻すと，1 つのリンクに対する $\psi_j(z)$ は図 4，図 5 の $\psi_j(z)$ を組み合わせた形になる．その結果得られる $\psi_j(z)$ の形状を図 6 に示す．これらの例から $\psi_j(z)$ は区間的線形となる，したがって $\psi_j(z)$ の上側包絡線も区間的線形となり，最小値が多項式時間で導出できる．

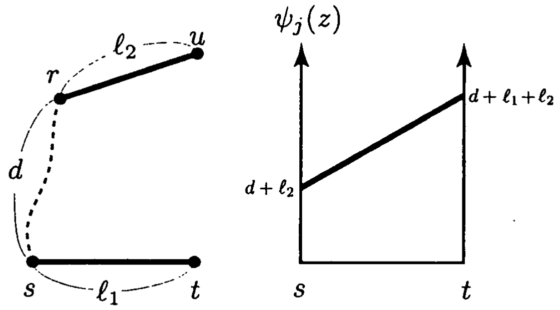

図 4: パターン 1 の $\psi_j(z)$

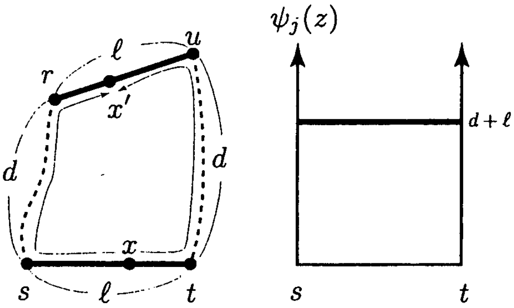

図 5: パターン 2 の $\psi_j(z)$

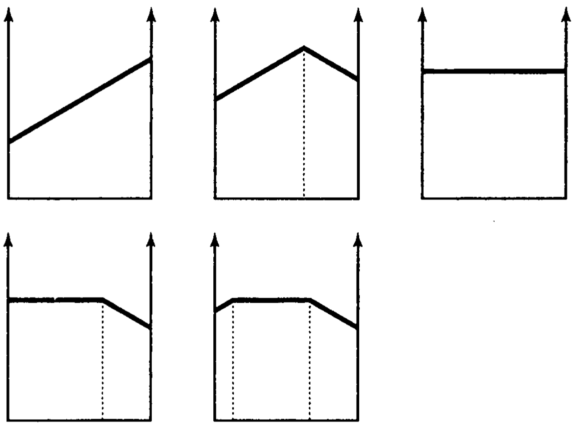

図 6: $\psi_j(z)$ の形状

参考文献

[1]Hakimi,S.L.(1965):Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems. *Operations Research,13*,pp.462-475.

[2]Kariv.O. and S.L.Hakimi(1979):An Algorithmic Approach to Network Location Problems,I:The p-Centers. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 37.* pp.513-538.

[3] 日本建築学会編 (1992):建築・都市計画のためのモデル分析の手法. 井上書院.

[4] 田村一軌, 腰塚武志 (2000):道路網上の距離分布と流動量分布に関する基礎的研究. 日本都市計画学会学術研究論文集第 35 号,pp.1021-1026.