

CNNによるネットワーク決済リスク拡散のモデル化と応用

02701840 九州大学 * 矢加部 政幸 YAKABE Masayuki
01304556 九州大学 時永 祥三 TOKINAGA Shozo

1 まえがき

本報告では、決済ネットワークにおけるリスク拡散をニューロンの集合であるCNN(Cellular Neural Network)を用いて定式化し、拡散を阻止する係数の値の推定、適切なフィードバック入力を加える同期化制御の応用を示す。

2 決済ネットワークとCNN

CNNはChua教授等により、非線型素子の回路網により偏微分方程式の体系を表現する方法として提案され、自律的なCNN、非自律的なCNNがある。このようなCNNにおいて、空間的な拡散(spatially discrete relation)を考慮したモデルを導入する。ここで、ラプラシアン ∇^2 を偏微分の近似で置き換える。変数 u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} をそれぞれ資本、労働、商品在庫(あるいは単に商品)に対応させ、これらによりその挙動が記述されていると仮定する。拡散項の数に応じて、これらをCNN-1, CNN-3とよんでおく(CNN-3の式は省略する)。

(CNN-1)

$$du_{ij}/dt = \alpha(v_{ij} - f(u_{ij})) +$$

$$D_u(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}) \quad (1)$$

$$dv_{ij}/dt = u_{ij} - v_{ij} + w_{ij} \quad (2)$$

$$dw_{ij}/dt = -\beta v_{ij} \quad (3)$$

$$f(x) = 0.5[(s_1 + s_2)x + (s_0 - s_1)(|x - B_1| - |B_1|) + (s_2 - s_0)(|x - B_2| - |B_2|)] + \varepsilon \quad (4)$$

このモデルは、資本の流出にだけ周辺への拡散を仮定したモデルであり、隣のセル(企業)との間において、金銭の決済関係が存在するケースである。ま

た、変数 v, w は、このセルにおける自律的な挙動を表現する補助的な変数の役割を果たす。

資本に対応する状態に非線型性を導入したのは、資本の蓄積に飽和する現象が見られることにある。すなわち、資本の増加率は資本が大きくなるに従ってマイナスとなり、次第に一定の負の値となる。資本が小さい場合には、その増加率は正であり、小さくなるに従って正の一定値をとる。また、資本に流出(流入)は決済の金の流れに対応している。更に、労働の増加率は資本の現在額および在庫の現在数量に比例し、一方で、これは生産の合理化を求めるものとして労働の現在数量に反比例している。在庫の増加は販売不振の反映として、労働の現在数量に反比例するとしている。

3 拡散の条件

3.1 拡散係数の下限値

CNNのような離散的な結合素子の配列(discrete coupled excitable cells)によって進行波を表現する場合において、拡散係数 D が小さい場合には進行波が阻害される(propagation failure)ことが知られている[3]。逆に、係数がどれ位大きくないと進行波とならないかを判断できる。

以下では、数値計算により進行波が存在するための条件を求めるとともに、この結果と、拡散を1つの次元方向だけに限定した場合の結果(Keenerの結果)との比較を行う。

(Keenerの結果)

次のようなダイナミックスを仮定する。

$$du_n/dt = d(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + f(u_n) \quad (14)$$

関数 $f(x)$ について、セルの添字を省略した表現において、変数 x の範囲を $[0,1]$ に正規化しておく。また、関数 $f(x)$ は、いわゆる cubic function であり、 $f(0) = f(\alpha) = f(1) = 0$ のような形をしている。以上のような関係において、次のような関係式を満足する x_0, x_1 が存在する場合には、進行波以外の定常的な解 (stable nonuniform standing solutions) が存在し、これが進行波の存在を解消する。

- (i) $2(x_0 - 1) - f(x_0)/d = 0$
- (ii) $2x_1 - f(x_1)/d = 0$
- (iii) $f'(x) < 2d$ on $0 \leq x \leq x_0, x_1 \leq x \leq 1$

なお、以下のシミュレーションでは、次のようなパラメータを設定している。

(CNN-1)

$$\alpha = 9, \beta = 30, s_1 = s_2 = 2/7$$

$$s_0 = -1/7, \varepsilon = 1/14, B_1 = -1, B_2 = 1$$

また、シミュレーションの条件については、この報告を通して次のように仮定する。

解析手法: ルンゲクッタ法, きざみ幅: $h = 0.01$

最大ステップ数: 100

3.2 シミュレーションとの比較

よく知られているように、式 (1)-(4) で拡散項がない方程式の解はリミットサイクルを描くので、その1つの解を安定状態であると考え、これを、 (u_a, v_a, w_a) としておく。CNN について、次のような値が知られている。

$$(CNN-1): (u_a, v_a, w_a) = (-1.25, 0, 1.25)$$

シミュレーションを開始したあと定められた時間経過の後に、セル $c(1, 1)$ 以外の場所において、時刻 t における値 (u, v, w) と (u_a, v_a, w_a) との2乗誤差を求め、その値が大きいかわかりかで進行波の伝搬を推定する。

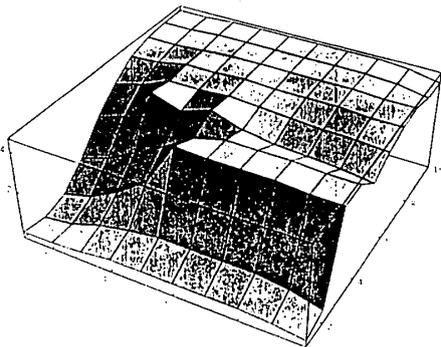


図1. 拡散を阻止 (CNN-3 のケース)

CNN の集合を決済ネットワークと考え、資本の減少を損失 (リスク) の発生と見なした場合、この損

失の拡大を阻止する方法を考察することができる。図1には、 10×10 セルの CNN のケースについて、拡散の広がりおよび阻止の例を示している。

表1には、CNN-1について、このように計算した D_u の値をシミュレーションにより求めた値と比較している。なお、このケースの理論値は、0.2(CNN-1) である。これらの結果より分かるように、近似計算は有効である。

表1. D_u と2乗誤差 (CNN-1)

$D_u = 0.1$	0.2	0.3	0.5
0.09	8.9	21.3	54.0

4 フィードバックによるカオス制御

カオス力学系において、適切な外力を加えて、安定軌道へと移行させる制御方法が存在する。このとき、制御入力を加えることにより、この安定点へと移行させる手順は、次のようにかける。

$$du_{ij}/dt = f_{uij} + \lambda_u \sum [u_a - u_{ij}] \quad (19)$$

v_{ij}, w_{ij} についても同様にかくことができる。 $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$ は制御のためのパラメータである。

シミュレーションにおいては、制御をはじめて約30ステップ目に収束をしている。決済ネットワークを構成する要素 (企業など) は、通常はランダムな行動を行なっても構わないが、ある時間が経過したのちに、定常的な状態の復帰することができるかを確認する必要がある。例えば、証券市場における clearing の機能がこれに相当するであろう。

参考文献

- [1] L.O.Chua and L.Young: "cellular neural network: Theory and practice", IEEE Trans., Circuits Syst., vol.35, no.10, pp.1257-1290, 1988.
- [2] L.Pivka: "Autowave and spatio-temporal chaos in CNNs-Part I and Part II", IEEE Trans. Circuits Syst., vol.42, no.10, pp.638-650, 1995.
- [3] 矢加部 正幸, 時永祥三: "企業間における情報共有とその分析に関する基礎的考察", 日本オペレーションズリサーチ学会年度秋期全国大会予稿集, 2000.
- [4] J.P.Keener: "Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells," SIAM J. Appl. Math, vol.47, no.3, pp.556-572, 1987.