金利(割引率)が経済政策(Job)に依存するNPV最適化単一機械順序づけ問題

01205220 日本大学生産工学部 篠原 正明
Nihon University Shinohara Masaaki

1 はじめに

単一機械上において様々なパラメータで特徴づけられる仕事(Job)を順序づけるスケジューリング問題の新しいクラスを提案する. 仕事 $i(i=1,\cdots,n)$ の属性パラメータベクトルを $\mathbb{p}_i$ とした時に, $\mathbb{p}_i$ のみにより計算できる評価指標 $C(\mathbb{p}_i)$ を用いて, スケジューリングの目的関数 $Q(x)$ を最適化する n 個の仕事の順序を決定できる新しいクラスである. 目的関数 Q として n 個の仕事に付随したキャッシュフロー時系列の正味現在価値 NPV を考えた NPV スケジューリング問題を考察対象とする. 2 章では, 本稿でとりあげる NPV スケジューリング問題を定義し, 既存の NPV スケジューリング問題 [1] との差異を説明する. 3 章では, この新しい NPV スケジューリング問題 (JD-NPVSSP:Job-dependent Discount-rate NPV-optimizing Single Machine Sequencing Problem) に対する順序づけ規則を与える. 4 章では, JD-NPVSSP の例題を通して, 政策実行をスケジューリングの視点から考察する. 5 章では, 本アプローチの一般化を試みる.

2 JD-NPVSSP の記述

単一機械上で n 個の仕事を NPV 値が最大となるように順序づけるスケジューリング問題において, 仕事間に事前の技術的順序関係は存在しない. 又, 非割り込み, 機械は 1 度に 1 仕事しか処理しない, 等々を仮定する. $\mathbb{p}_i$(仕事 i の属性パラメータベクトル) の構成要素としては, τ_i(仕事 i の処理時間), g_i(仕事 i 開始時に得られるキャッシュフロー), α_i(仕事 i 処理中の割引き瞬間利子率 ; 処理中利子率) を考える. 又, x_i は仕事 i の開始時刻である. 標記の問題 JD-NPVSSP は以下に定式化できる.

<u>JD-NPVSSP</u>

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & NPV=\sum_{i=1}^{n} g_i \exp\left(-\int_0^{x_i}\alpha(t)\,dt\right) \\ \text{subject to} & x=\mathbb{F}(s) \\ & s\in P(n) \end{array} \tag{1}$$

ここで, 仕事の処理順序 $s\in P(n)$ に依存して, x が決まり, この x の関数として $\alpha(t)$ が決まる点に注意を要する. すなわち, 既存の NPV スケジューリング問題である NPVSSP[1] では, 瞬間割引率 $\alpha(t)$ は与えられるデータ値であったが, 本稿の JD-NPVSSP では, 問題の決定変数 x に依存した値をとる.

3 JD-NPVSSP の順序づけ規則

3.1 n=2 の場合についての考察

予備的な考察として, 「1 台の機械上で 2 つの仕事, 仕事 $1(\tau_1,g_1,\alpha_1)$ と仕事 $2(\tau_2,g_2,\alpha_2)$, のどちらを先に処理すれば NPV 値が大きいのか?」という問題を扱う. この問題に対して次の補題 1 が成立する.

<u>補題 1</u>
スケジュール開始時点 $t=z$ において, 仕事順 1 → 2 が NPV 最大となるための必十条件は次式が成り立つことである.

$$\frac{g_1}{1-\exp\left(-\int_z^{z+\tau_1}\alpha_1\,dt\right)} > \frac{g_2}{1-\exp\left(-\int_z^{z+\tau_2}\alpha_2\,dt\right)} \tag{2}$$

(証明)NPV_{12} を仕事順 1 → 2, NPV_{21} を仕事順 2 → 1 の場合の NPV とする (便宜上 $t=z$ を現在時点と考える).

$$NPV_{12}=g_1+g_2\exp\left(-\int_z^{z+\tau_1}\alpha_1\,dt\right) \tag{3}$$

$$NPV_{21}=g_2+g_1\exp\left(-\int_z^{z+\tau_2}\alpha_2\,dt\right) \tag{4}$$

従って,

$$\begin{aligned}\Delta\ NPV &= NPV_{12}-NPV_{21} \\ &= g_1\left(1-\exp\left(-\int_z^{z+\tau_2}\alpha_2\,dt\right)\right) \\ &\quad -g_2\left(1-\exp\left(-\int_z^{z+\tau_1}\alpha_1\,dt\right)\right)\end{aligned} \tag{5}$$

すなわち, $\delta NPV>0$ の条件を整理すると式 (2) になる. (Q.E.D)
ここで, (2) 式を変形すると次の (6) 式になる.

$$\frac{g_1}{1-\exp(-\alpha_1\tau_1)} > \frac{g_2}{1-\exp(-\alpha_2\tau_2)} \tag{6}$$

3.2 一般nの場合の順序づけ規則

3.1節の考察結果をもとに, 一般のnでの順序づけ規則を以下に与える.

定理1

NPVが最大となるための必十条件は, 指標$C_i = g_i/(1-\exp(-\alpha_i\tau_i))$の大きい順(非増加順, あるいは減少順)に仕事を処理することである.

(証明) (その1:「NPV最大→非増加順」の証明)

非増加順でないとする. 即ち, 次式が成り立つjが存在する. ($C[j]$はj番目に処理する仕事のC値).

$$C_{[j]} < C_{[j+1]} \tag{7}$$

このような場合には, 補題1より[j]と[j+1]の仕事順序を交換することによりNPVは増加する. これはNPV最大に矛盾する.

(その2:「非増加順→NPV最大」の証明)

NPVが最大でないとする. 非増加順の順列を標準形順列$s_0 = (1,2,\cdots,n)$, 他の真のNPV最大を与える非増加順でない順列をs'とする. s'は有限回の逆順序隣接互換によりs_0に変換でき, また, 補題1より1回の逆順序隣接互換によりNPVは増加する(c値が等しい時はそのまま). 従って, $NPV(s') < NPV(s_0)$となり, $NPV(s_0)$が最大を与える. (QED)

[定理1]での順序づけのための指標$C_i = g_i/(1-\exp(-\alpha_i\tau_i))$は連続時間版であり, αは瞬間利子率である. 離散時間版においては, rを単位期間あたり利子率とすれば, $e^\alpha \fallingdotseq 1+\alpha$で$\alpha = r$と形式置換した指標$C_i = g_i/(1-(1+r_i)^{-\tau_i})$を使えばよい.

4 例題($n=3$)

仕事iの属性パラメータ(τ_i, g_i, α_i)が表1で与えられるn=3のJD-NPVSSPを解く. 表2にはNPVSSPの順序づけの指標$A_i = g_i/(1-(1+r)^{-\tau_i})$(但し, r=0.1とした)と近似指標$B_i = g_i/\tau_i$, JD-NPVSSPの順序づけの指標$C_i = g_i/(1-(1+r_i)^{-\tau_i})$とその近似指標$D_i = g_i/(\tau_i r_i)$を示した.

割引利子率が固定される従来のNPVSSPではA_i(あるいは近似的にB_i)の減少順の順序づけ「(i=1)→(i=3)→(i=2)」によりNPV最大化が達成され, この時のNPV値は$NPV_{132} \fallingdotseq 8.594$(兆円)である. 一方, JD-NPVSSPでは, C_i(あるいは近似的にD_i)の減少順の順位づけ「(i=2)→(i=3)→(i=1)」により, NPV最大化が達成され, この時のNPV値は$JD-NPV_{231} \fallingdotseq 9.50$(兆円)である. ちなみに, NPVSSPの最適順序(132)をJD-NPVSSPに適用しても, 対応するNPV値は$JD-NPV_{132}$=8.04(兆円)で, 最適値とは大きくかい離している.

表1: 属性パラメーター一覧

		$i=1$	$i=2$	$i=3$
p_i	g_i(兆円)	2	3	5
	τ_i(年)	1	2	3
	r_i(/年)	0.2	0.0	0.1

表2: 順序付け指標とその近似

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$A_i = \frac{g_i}{1-\frac{1}{(1+r)^{\tau_i}}}$ (但し, $r=0.1$)	22.00	17.29	20.10
$B_i = g_i/\tau_i$	2	1.5	1.666
$C_i = \frac{g_i}{1-\frac{1}{(1+r_i)^{\tau_i}}}$	12	無限大	20.10
$D_i = g_i/(\tau_i r_i)$	10.0	無限大	16.666

JD-NPVSSPの具体的イメージとして以下を考える. 任期期間中(例題では6年)にn個の経済政策プロジェクト(例題ではn=3)を実行する場合に, 各々の政策プロジェクトにより得らる総利得をキャッシュフローとして評価し, 個々の政策プロジェクトを実施することにより該当期間の景気状況を金利割引き利子率に反映する. 割引き利子率が特定値に固定される期間が, 仕事の処理時間(政策プロジェクトの継続期間)とも考えられる. 評価指標C_iは, A_iと同様に無限繰返しNPVと解釈できるが, A_iが仕事iに無関係の割引き率rに関してであるのに対して, C_iは割引利子率r_iの下での無限繰返しNPVである点が相違点である.

5 本アプローチの一般化

JD-NPVSSPの目的関数は次式で一般的に表記できる.

$$JD-NPV = \sum_{i=1}^{n} g_{[i]}\left(\prod_{k=1}^{i} \beta_{[k]}^{\tau[k]}\right) \tag{8}$$

式(8)は, NPVSSPの目的関数(9)において, 形式的には$\beta^{x[i]}$を$\prod_{k=1}^{i} \beta_{[k]}^{\tau[k]}$と置換したものである.

$$NPV = \sum_{i=1}^{n} g_i \beta^{x_i} = \sum_{i=1}^{n} g_{[i]} \beta^{x[i]} \tag{9}$$

参考文献

[1] 篠原正明, NPV最適化単一機械順序づけ問題について, 1993年度日本OR学会秋季研究発表会, 2-c-6, pp.186-187(1993).