2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

期首発注と追加発注に関する研究

01507094　大阪府立大学　*北條仁志　HOHJO Hitoshi
01302694　大阪府立大学　寺岡義伸　TERAOKA Yoshinobu

1．はじめに

これまでの研究では、追加発注は不足分に対してバックログするために行われてきた。しかしながら、在庫維持費用が品切れ損失に比べて小さければ、より多くの追加発注を行うことにより費用をさらに削減することができる。本稿では、費用最小化という評価基準の下で、期首発注量と追加発注量の関係、および最適発注量について考察を行う。

2．モデル

単一施設単一製品の一期間における在庫問題について考える。tを1期間長とする。初期在庫量xから出発する。商品の発注は期首および与えられた時点$t_0 (0 \leq t_0 \leq t)$でのみ可能である。期首には在庫レベルがSになるまで発注される。もし時点t_0で過剰需要が生じていると、量sを追加発注することができる。sに制限は無く、それらの発注量は瞬時に（リードタイム0で）満たされる。発注には段取り費用を考慮せず、期首の発注では単位当たりc_1が課せられ、追加発注では単位当たりc_2の費用が課せられる。商品は価格rで販売される。また、保持されている在庫には単位時間単位当たりの在庫維持費用hがかかり、不足に対しては単位時間当たりの品切れ損失費用pがかかる。$g(x)$を$0 \leq x \leq 1$上で定義された$g(0)=0, g(1)=1, \frac{dg(x)}{dx}>0$なる$x$の関数とする。期間のある時点$T$までの累積需要量はその期間の総需要量$b$の関数であり、$g(T/t)b$と表される。ここに、確率的に変化するのは需要量のみであり、bは確率変数Bの実現値の1つである。$\phi(\cdot)$をbの確率密度関数、$\Phi(\cdot)$をその累積分布関数とする。$G(x)=\int_0^x g(y)dy$ とおく。

費用や量に関するパラメータに関して次のような仮定を与える。

$$\begin{cases} S \geq 0,\ s \geq 0,\ b \geq 0 \\ h \geq 0,\ p \leq 0,\ 0 \leq c_1 \leq c_2 \leq r \\ \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p + r - c_2 \geq 0 \end{cases}$$

本稿での目的は、総費用の最小化という評価基準の下で最適な期首の在庫レベルS、および最適な追加発注量sを求め、それらの関係について考察することにある。

3．定式化

このモデルでは、与えられたSおよびsに対して次のような5つの在庫推移の状態が存在する。

(I) $0 \leq b \leq S$

期首在庫量Sにより需要量bすべてが満たされる。過少需要のため、末期でも在庫を保持することになる。時点t_0での追加発注は行われない。

(II) $S < b \leq S/g(t_0/t)$

時点t_0では在庫を所持しているため、追加発注は行われない。しかしながら、その後の需要により末期には在庫不足の状態となる。

(III) $b > (S+s)/g(t_0/t)$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。このとき、追加発注量sは時点t_0までの過剰需要の一部をバックログすることになる。

(IV) $\max\{S/g(t_0/t), S+s\} < b \leq (S+s)/g(t_0/t)$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。このとき、時点t_0までの過剰需要を完全にバックログし、その上、在庫を保持することになる。しかしながら、その後の需要により末期には再び在庫不足の状態に陥る。

(V) $S/g(t_0/t) < b \leq S+s$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。この追加発注量sが十分大きいため、末期までの需要をすべて満たすことになる。

時点Tにおける在庫量$Q(T)$は、(I),(II)のとき、

$$Q(T) = S - g(T/t)b,\ 0 \leq T \leq t$$

であり、(III)-(V)のとき、

$$Q(T) = \begin{cases} S - g(T/t)b,\ 0 \leq T \leq t_0 \\ S + s - g(T/t)b,\ t_0 < T \leq t \end{cases}$$

と書ける。$C(S,s;b)$ を需要量が b である時の総期待費用、$C_i(S,s;b), i=1,\ldots,5$ を各在庫状態での総期待費用とすると、次のようになる：

$$C(S,s;b) = \begin{cases} C_1(S,s;b), & 0 \le b \le S \\ C_2(S,s;b), & S < b \le S/g(t_0/t) \\ C_3(S,s;b), & b > (S+s)/g(t_0/t) \\ C_4(S,s;b), & \max\{S/g(t_0/t), S+s\} < b \le (S+s)/g(t_0/t) \\ C_5(S,s;b), & S/g(t_0/t) < b \le S+s \end{cases}$$

そこで

$$C_1(S,s;b) = [c_1+h]S - [hG(1)+r]b - c_1x,$$
$$C_2(S,s;b) = [c_1-p-r]S + (h+p)\{Sg^{-1}(S/b) - bG(g^{-1}(S/b))\} + pbG(1) - c_1x,$$
$$C_3(S,s;b) = [c_1-p-r]S + (h+p)\{Sg^{-1}(S/b) - bG(g^{-1}(S/b))\} + pbG(1) + [c_2-r-p(1-t_0/t)]s - c_1x,$$
$$C_4(S,s;b) = [c_1-p-r]S + (h+p)[S\{g^{-1}(S/b) + g^{-1}((S+s)/b) - t_0/t\} + sg^{-1}((S+s)/b) - b\{G(g^{-1}(S/b)) + G(g^{-1}((S+s)/b)) - G(t_0/t)\}] + pbG(1) - [ht_0/t + p + r - c_2]s - c_1x,$$
$$C_5(S,s;b) = [c_1 - pt_0/t + h(1-t_0/t)]S + (h+p)[Sg^{-1}(S/b) + b\{G(t_0/t) - G(g^{-1}(S/b))\}] + [h(1-t_0/t)+c_2]s - [hG(1)+r]b - c_1x$$

総費用 $C(S,s;b)$ の期待値 $E[C(S,s;B)]$ は

$$E[C(S,s;B)] = \begin{cases} E_1[C(S,s;B)], & S+s \le S/g(t_0/t) \\ E_2[C(S,s;B)], & S+s > S/g(t_0/t) \end{cases}$$

であり、

$$\begin{aligned} E_1[C(S,s;B)] &= \int_0^S C_1(S,s;b)\phi(b)db + \int_S^{S/g(t_0/t)} C_2(S,s;b)\phi(b)db \\ &+ \int_{S/g(t_0/t)}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S,s;b)\phi(b)db + \int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S,s;b)\phi(b)db, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2[C(S,s;B)] &= \int_0^S C_1(S,s;b)\phi(b)db + \int_S^{S/g(t_0/t)} C_2(S,s;b)\phi(b)db \\ &+ \int_{S/g(t_0/t)}^{S+s} C_5(S,s;b)\phi(b)db + \int_{S+s}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S,s;b)\phi(b)db \\ &+ \int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S,s;b)\phi(b)db \end{aligned}$$

により計算される。

追加発注が有効であるための条件は、

$$(1-t_0/t)p + r - c_2 \ge 0$$

および、任意の S, s に対して

(i) $S+s \le S/g(t_0/t)$ のとき

$$(h+p)[(S+s)\{g^{-1}(\tfrac{S+s}{S}g(\tfrac{t_0}{t})) - \tfrac{t_0}{t}\} - \{G(g^{-1}(\tfrac{S+s}{S}g(\tfrac{t_0}{t}))) - G(\tfrac{t_0}{t})\}S/g(\tfrac{t_0}{t})] \le [(1-t_0/t)p + r - c_2]s$$

(ii) $S+s > S/g(t_0/t)$ のとき

$$[(1-t_0/t)(h+p)+r]S + [h(1-t_0/t)+c_2]s - [(h+p)\{G(1)-G(t_0/t)\}+r]S/g(t_0/t) \le 0$$

である。

4．最適政策

与えられた s に対して期待総費用 $E[C(S,s;B)]$ を最小にする最適な期首発注量 S^* は $\frac{\partial}{\partial S}E[C(S,s;B)] = 0$ より得ることができる。また、与えられた S に対して期待総費用 $E[C(S,s;B)]$ を最小にする最適な追加発注量 s^* は $\frac{\partial}{\partial s}E[C(S,s;B)] = 0$ より得ることができる。これらの結果により、最適発注政策 (S^*, s^*) を求められる。

紙面の都合上、これらの詳細については当日発表させて頂く。

参考文献

[1] 川勝, 三道, 濱田, 小売業における特別展示商品に対する最適発注量, 日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集, (1999), 228-229.

[2] 児玉正憲, 『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会 (1996).

[3] 徂徠, 有薗, 太田, 返却および追加注文を許す一期間モデルの解法, 日本経営工学会誌, Vol.37, No.2 (1986).

[4] Heymand D.P. and Sobel M.J., Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2, Elsevier Science Publishers (1990).