2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

準モンテカルロ法のアメリカンオプション価格付けへの応用

01604870 政策研究大学院大学 諸星 穂積 MOROHOSI Hozumi
01501020 南山大学 伏見 正則 FUSHIMI Masanori

1 はじめに

n 個の資産があるとする．それらの時刻 t $(t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots)$ における価格を $\mathbb{S}_t = (S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(n)})$ で表す．$\mathbb{S}_t$ の各成分 $S_t^{(i)}$ は，以下のようなマルコフ過程に従うとする．

$$S_{t+1}^{(i)} = S_t^{(i)} \left(1 + (r - \delta^{(i)})\Delta t + \sigma^{(i)} \sqrt{\Delta t} Z_t^{(i)}\right) \tag{1}$$

ただし，r は非危険利子率，$\delta^{(i)}$ は配当率，$\sigma^{(i)}$ はボラティリティ，$\mathbb{Z}_t = (Z_t^{(1)}, \ldots, Z_t^{(n)})$ は相関係数 ρ_{ij} をもった標準正規分布に従う確率変数とする．

以上の設定の下で，以下のような問題を考える．利得関数 $h(\mathbb{S})$ が与えられたとき，

$$\max_{\tau} \mathrm{E}\left[\exp(-r\tau)h(\mathbb{S}_\tau)\right] \tag{2}$$

を求めたい．ただし，max は全ての停止時刻 τ $(\tau = 0, \Delta t, \ldots, N\Delta t (= T))$ の下でとる．これは最適停止問題と呼ばれる問題であり，古くより研究され，また近年アメリカンオプションの価格付けの問題として注目されている．この問題には一般に解析解はなく，シミュレーション等により数値解を求めるしかない．ここでは，期待利得の最大値を求める問題に絞ってシミュレーションによる解法を考える．

2 ランダムツリー法 [1]

ここでは，[1] によって提案されたランダムツリー法の紹介をする．この方法は，動的計画法を利用して (2) の値を求めるもので，期末 T の利得 $C_T = h(\mathbb{S}_T)$ を終端条件として，

$$C_t(\mathbb{S}_t) = \max\left\{h(\mathbb{S}_t), \mathrm{E}[C_{t+1}(\mathbb{S}_{t+1})|\mathbb{S}_t]\right\}$$

を $t = (N-1)\Delta t, \ldots, 0$ について順次解いて，$C_0(S_0) = \max_\tau \mathrm{E}[\exp(-r\tau)h(\mathbb{S}_\tau)]$ を求める．ここで問題は，$\mathrm{E}[C_{t+1}(\mathbb{S}_{t+1})|\mathbb{S}_t]$ の推定をいかに行うかである．[1] は，high estimator と low estimator という 2 つの推定量を導入して，価格の点推定と区間推定を得る方法を提案した．方法の概要は以下の通り．

1. （ランダムツリーの作成） 資産の各時点での価格分布をシミュレートするため高さ N のツリーを作成する．ツリーの各節点は資産の価格を表し，各節点からは b 本の枝が出ている．ツリーは以下のような配列の組で表現される．ツリーの根 $S[0] = \mathbb{S}_0$ は時刻 0（現時点）における資産の価格（所与）である．ツリーの次の段 $S[0, i_1]$, $i_1 = 0, 1, \ldots, b-1$ は，$\mathbb{S}_0$ が与えられたとして，式 (1) に従い $\mathbb{S}_1$ を b 個発生させ代入する．次の段 $S[0, i_1, i_2]$ には，各 $S[0, i_1]$ を $\mathbb{S}_1$ として式 (1) に従い $\mathbb{S}_2$ を b 個発生させて代入する．$S[0, i_1, i_2]$ は b^2 個の値よりなる配列である．以下同様に $S[0, i_1, \ldots, i_N]$ まで求める．
2. (high estimator Θ) 上に作成したツリーの値を使って以下の推定量 Θ を求める．まず，期末 T においては $\Theta[0, i_1, \ldots, i_N] = h(S[0, i_1, \ldots, i_N])$ とする．以下順次再帰的に計算し

$$\Theta[0, i_1, \ldots, i_k] = \max\{h(S[0, i_1, \ldots, i_k]), \frac{1}{b}\sum_{i_{k+1}=0}^{b-1} \mathrm{e}^{-r\Delta t}\Theta[0, i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}]\}$$

として，最後の $\Theta[0]$ まで求める．

3. (low estimator θ) 上に作成したツリーの値を使ってまず $\theta[0, i_0, \ldots, i_N] = h(S[0, i_0, \ldots, i_N])$ とする．期末前の θ の計算は，まず次の η を各時点で最初に計算する．

$$\eta[i_0, \ldots, i_k, i] = \begin{cases} h(S[0, i_1, \ldots, i_k]), \\ \quad \text{if } h(S[0, i_0, \ldots, i_k]) \geq \\ \qquad \frac{1}{b-1} \sum_{j \neq i} \mathrm{e}^{-r\Delta t} \theta[0, i_1, \ldots, i_k, j] \\ \\ \mathrm{e}^{-r\Delta t} \theta[0, i_1, \ldots, i_k, i], \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

この $\eta[0, i_1, \ldots, i_k, i]$ を用いて

$$\theta[0, i_1, \ldots, i_k] = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{b} \eta[0, i_1, \ldots, i_k, i]$$

とする．再帰的に $\theta[0]$ まで求める．

以上の手続きで，1つのランダムツリーにつき1つずつ Θ と θ が求まる．推定のためには，複数のランダムツリーを発生させ，それらによって各推定量の平均 $\bar{\Theta}, \bar{\theta}$ を求め，$(\bar{\Theta} + \bar{\theta})/2$ を期待利得の点推定として用いる．また各推定量の標本標準偏差 $s(\Theta)$, $s(\theta)$ を同時に求めて信頼区間の推定に用いる．

3 準モンテカルロ化

ランダムツリー法の問題点は，計算量が時間 $[0, T]$ の分割数 N の指数オーダーになってしまうことである（計算量は，ツリーの節点数に比例すると考えられる．節点数は $\sum_{i=0}^{N} b^i = (b^{N+1} - 1)/(b-1)$ である）．

計算量削減の一つの工夫として，準モンテカルロ法 [3] を利用することを提案する．各推定量は，各時点での資産価格の条件付き期待値を求めている．準モンテカルロ法は，数値積分を効率的に行うための手法であるので，各推定量の計算に有効である可能性がある，というのが適用の根拠である．

具体的な手順は以下の通り．ランダムツリーの作成時，各節点から枝を発生させるとき n 次元の正規乱数を用いた．正規乱数 $\mathbf{Z}$ は，通常 $[0, 1]^n$ 上の一様乱数 $\mathbf{X}$ から何らかの変換によって得られる（たとえば逆関数法）．この一様乱数 $\mathbf{X}$ を準乱数に置き換える．推定のためには複数のランダムツリーが必要である．このためには，準モンテカルロ法のランダム化の手法を用いる [2]．数値実験の詳細については当日述べる．

4 むすび

準モンテカルロ法の適用は，ツリーの各節点からでる枝の本数 b を減らすことをねらっている (時間分割数 N についての計算量の指数的増大を回避することはできない)．数値実験の結果をみると，単純なモンテカルロ法に比較すれば，計算量削減の効果が認められ，この問題への準モンテカルロ法の適用は有効であると考えられる．

一方，ランダムツリー法の（従ってその準モンテカルロ化も）利点として，資産価格 $\mathbf{S}_t$ が複雑に変動するモデルに対しても，適用は容易であることがあげられる．より複雑なモデルへの適用を今後の課題としたい．

参考文献

[1] Broadie, M. and P. Glasserman: Pricing American-style Securities Using Simulation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 21(1997), pp. 1323–1352.

[2] 諸星穂積，伏見正則: 準モンテカルロ法の誤差の解析手法の比較，日本 OR 学会 2000 年度春季研究発表会アブストラクト集, pp. 20–21, 2000.

[3] Niederreiter, H.: *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*, SIAM, Philadelphia, 1992.