2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

移動から見た線的施設までの距離分布

02602330　筑波大学 *宮川雅至　MIYAGAWA Masashi
01009480　筑波大学　大澤義明　OHSAWA Yoshiaki

1. はじめに

日常生活の移動では，時間に余裕を持って出発し，途中に寄り道をすることがよくある．本研究では，移動途中に立ち寄る施設が線的施設である場合を考え，線的施設が直線として表現できるとする．ただし，立ち寄る場所は直線上であればどこでも良いことにする．以下では，寄り道という移動パターンを表す楕円モデルと俵型モデルを用い，線的施設までの最近隣距離を理論的に導出する．

2. 楕円と交わる直線の測度

出発地 O から目的地 D へ向かうとき，起終点間距離を T，迂回距離を $2r$ とすると，総移動距離が等しくなる地点の集合は楕円になり，楕円上の地点へ立ち寄るときの移動距離はすべて $T+2r$ となる（文献 [1]）．従って，楕円と直線が交われば，迂回距離 $2r$ 以内で立ち寄ることが可能である．

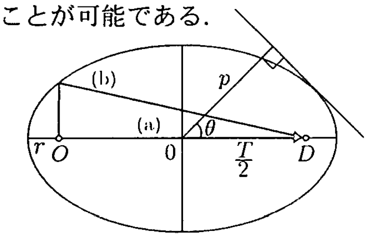

図 1: 楕円と交わる直線

原点から直線に下ろした垂線の長さを p，x 軸との角度を θ とすると，x-y 平面上の直線は p-θ 平面における 1 点に対応させることができ，$T=1, r=0.1$ のときの楕円と交わる直線群の p-θ 平面表示は図 2 のようになる．図 2 には，図 1 の移動 $(a),(b)$ と交わる直線群も表されている．(a) は全く迂回を許さない移動，(b) は移動距離 $T+2r$ の移動の一例である．

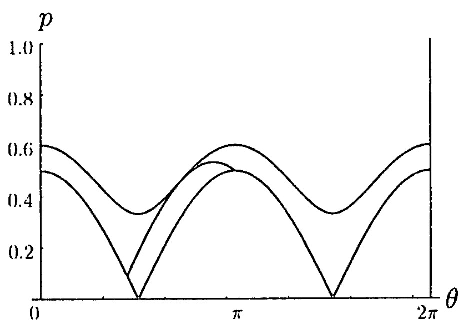

図 2: 楕円と交わる直線群の p-θ 平面表示

図 2 の領域の面積は，交わる直線の測度を表し，楕円の場合には

$$2(T+2r)E\left(\frac{T}{T+2r}\right)=L \tag{1}$$

と楕円の周長に一致し，第 2 種完全楕円積分を用いて表される．移動 $(a),(b)$ と交わる直線の測度はそれぞれ $2T, 2(T+r)$ となり，凸包の周長と一致する（文献 [2]）．

3. 直線までの最近隣距離

最近隣距離とは任意の移動に対し，最小の迂回で立ち寄り可能な直線までの迂回距離と定義する．そして，直線が一様にランダムに分布していると仮定する．

直線を p,θ を用いて表すと，一様にランダムな直線とは，p 軸，θ 軸上で点の分布が一様にランダムであるということに対応する（文献 [3]）．従って，楕円と少なくとも 1 本の直線が交わる確率は，p-θ 平面において楕円と交わる直線群が示す領域の中に点が少なくとも 1 つある確率に等しい．

楕円と x 本の直線が交わる確率を $P(x,L)$ と表すことにすると，楕円と少なくとも 1 本の直線が交わる，つまり最近隣距離を R としたとき $0<R<r$ である確率は

$$F(r)=1-P(0,L) \tag{2}$$

となる（文献 [3]）．ただし $F(r)$ は最近隣距離の累積分布関数である．直線の密度を ρ とすると，$P(x,L)$ はポアソン分布に従うから，式 (1) より，

$$P(0,L)=\exp\left\{-2\rho(T+2r)E\left(\frac{T}{T+2r}\right)\right\} \tag{3}$$

とできる．従って，$F(r)$ は

$$F(r)=1-\exp\left\{-2\rho(T+2r)E\left(\frac{T}{T+2r}\right)\right\} \tag{4}$$

と導かれる．図 3 は T を変化させたときの最近隣距離の累積分布関数を表す．T が大きくなるにつれ，迂回距離が小さくても途中に立ち寄ることのできる確率が高くなる．$T>0$ のときの切片 $F(0)=1-\exp(-2\rho T)$ は O と D を結ぶ線分と直線が交わる確率を表しており，迂回を許さなくても立ち寄り可能となり得ることが点の場合と異なる直線の大きな特徴であるといえる．

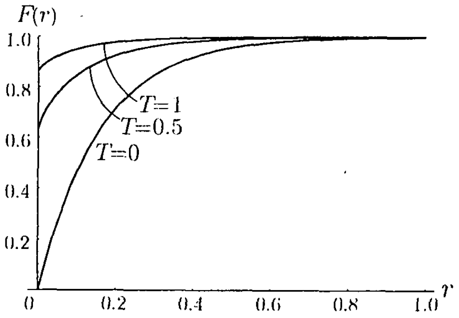

図 3: 最近隣距離の累積分布関数

4. 俵型モデル

楕円モデルでは出発地から直接立ち寄る施設に向かう移動を扱っていたが，ここではまずは目的地へ向かい，途中で寄り道をして再び元の経路に戻るような移動について考える．これは，沿道から見える施設に立ち寄るような移動に対応する．このとき，総移動距離が等しくなる地点の集合は俵型になる．

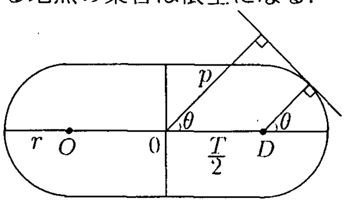

図 4: 俵型と交わる直線

図 5 は，俵型および O と D を結ぶ線分，すなわち迂回を許さない移動と交わる直線群の p-θ 平面表示である．楕円の場合と比較すると，迂回距離が等しくても迂回によって増加する部分が小さいことが分かる．

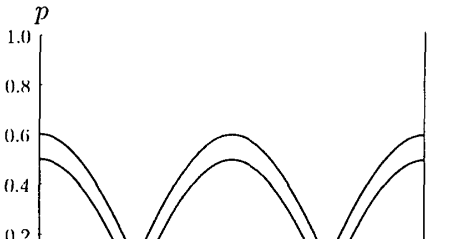

図 5: 俵型と交わる直線群の p-θ 平面表示

図 5 の領域の面積，すなわち俵型と交わる直線の測度は俵型の周長

$$L = 2(\pi r + T) \tag{5}$$

に一致し，最近隣距離の累積分布関数は

$$F(r) = 1 - \exp\{-2\rho(\pi r + T)\} \tag{6}$$

と導かれる．楕円の場合と比較すると，$T > 0$ のときは楕円の方が確率が高く，さらに T が大きくなればその傾向は強まる．

5. 直線の密度が一定でない場合

直線が一様にランダムに分布している場合には，直線の密度 ρ は一定であったが，本節では ρ が確率密度関数

$$f(\rho) = \frac{1}{a\Gamma(p)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{p-1} e^{-\rho/a} \tag{7}$$

なるガンマ分布に従っているとする．ここで p は分布の型に関係し，a は対象全体における密度に関係する．このとき $P(x, L)$ は

$$P(x, L) = \frac{\Gamma(p+1)}{x!\Gamma(p)}\left(\frac{1}{1+aL}\right)^{p}\left(\frac{aL}{1+aL}\right)^{x} \tag{8}$$

という負の二項分布に従う（文献 [4]）．最近隣距離の累積分布関数は式 (1), (2) より，

$$F(r) = 1 - \left[\frac{1}{1 + 2a(T+2r)E\{T/(T+2r)\}}\right]^{p} \tag{9}$$

と求まる．

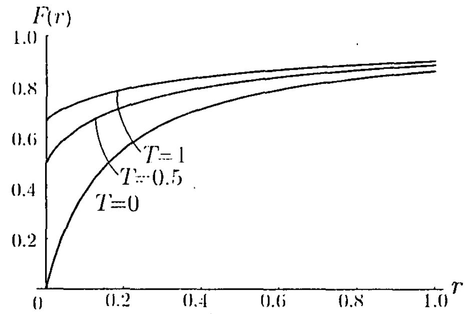

図 6: 最近隣距離の累積分布関数 ($a = 1, p = 1$)

6. おわりに

線的施設への立ち寄り易さの指標として楕円モデル，俵型モデルにおいて最近隣距離を求めた．また，一般化として直線の密度も確率変数として表される場合を考察した．

参考文献

[1] 宮川雅至，大澤義明 (2000)：迂回距離と旅行自由度との関係について．日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集，pp.232-233.

[2] L.A.Santaló(1976):Integral geometry and geometric probability.Addison-Wesley Publishing Company.

[3] 腰塚武志 (1985)：都市施設の密度と利用者からの距離との関係について．昭和 60 年度第 20 回日本都市計画学会学術研究論文集，pp.85-90.

[4] 谷村秀彦，梶秀樹，池田三郎，腰塚武志 (1986)：都市計画数理．朝倉書店．