2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

直・並列と並・直列システムの信頼性的考察

01400043　愛知工業大学　＊中川 覃夫　NAKAGAWA Toshio
02991833　愛知工業大学　　銭 存華　QIAN Cun Hua

1　まえがき

代表的な冗長システムである 2 つの直・並列システムと並・直列システムについて，いろいろな信頼性の性質を調べる．

2　直・並列システム

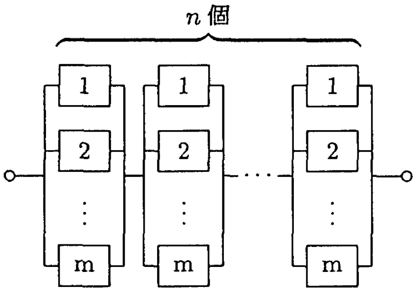

図 1: 直・並列システム

図 1 のように，m 個の並列システムが n 個直列になっている直・並列システムを考える．各ニットの信頼度を $q \equiv 1-p$ $(0<p<1)$ とおくと，このシステムの信頼度は

$$R_{n,m}(q) = [1-(1-q)^m]^n = (1-p^m)^n \tag{1}$$

となる．(1) 式で与えられる信頼度の性質を調べる．

(i) 明らかに，$\lim_{q\to 0} R_{n,m}(q) = 0$, $\lim_{q\to 1} R_{n,m}(q) = 1$ であるから，$R_{n,m}(q)$ は 0 から 1 までの q の単調増加関数である．

(ii) $0<p<1$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,m}(q) = 0 \quad (m<\infty), \\ \lim_{m\to\infty} R_{n,m}(q) = 1 \quad (n<\infty). \tag{2}$$

(iii) $n \geq 2$, $0<p<1$ に対して，

$$1-np^m < (1-p^m)^n < 1-np^m + \frac{n(n-1)}{2}p^{2m} \tag{3}$$

であるから，

$$R_{n,m}(q) - (1-np^m) < \frac{n(n-1)}{2}p^{2m}. \tag{4}$$

(iv) 次に，

$$R_{n,n}(q) = (1-p^n)^n \tag{5}$$

の性質を調べる．(3) 式から，$0<p<1$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,n}(q) \geq \lim_{n\to\infty}(1-np^n) = 1. \tag{6}$$

表 1: $p=0.1$ のとき，$(1-p^n)^n$ と $1-np^n$ の値

n	$(1-p^n)^n$	$1-np^n$
1	0.90000	0.90000
2	0.98010	0.98000
3	0.99700	0.99700
4	0.99960	0.99960
5	0.99995	0.99995

表 1 に，$p=0.1$ のとき，$(1-p^n)^n$ と近似式 $1-np^n$ を $n=1,2,3,4,5$ に対して，計算する．この場合，n が $n+1$ になると，システムのユニット数は n^2 のオーダーで増加することに注意する．$n \geq 3$ に対して，$(1-p^n)^n \approx 1-np^n$ である．不良率 p の値が小さくなるならば，その精度はもっとよくなる．一般に，直・並列システムでは，$1-np^n$ を計算すれば，十分であろう．

(v) (5) 式において，n の単調性を調べるため，

$$(1-p^{n+1})^{n+1} = (1-p^n)^n \tag{7}$$

を満たす p_n $(0<p_n<1)$ の値を求める．とくに，$n=1$ のとき，$p_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ となり，黄金比と等しくなる．

p_n は n の単調増加関数であることが期待される．近似式 (3) 式において，

$$1-(n+1)p^{n+1} = 1-np^n \tag{8}$$

とおき，この式を満たす解は $\tilde{p}_n = n/(n+1)$ となる．明らかに，$\tilde{p}_n$ は 1/2 から 1 までの単調増加関数である．よって，$0<p<0.5$ のとき，$1-np^n$ は q から 1 までの n の単調増加関数である．

表 2 に，n に対して，p_n と $\tilde{p}_n$ の値を示す．この表から，p_n は n の単調増加関数で，$p_n > \tilde{p}_n$ であることが分かる．従って，$0<p\leq 0.618$ のもとでは，$(1-p^n)^n$ は n の単調増加関数である．一般に，p はユニットの故障確率 (不良率) であるから，$p \leq 0.618$ である．以上から，$R_{n,n}(q) = (1-p^n)^n$ は q から 1 までの n の単調増加関数であると言える．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

表 2: n に対して，p_n と $\tilde{p}_n$ の値

n	p_n	$\tilde{p}_n$
1	0.61803	0.50000
2	0.75488	0.66667
3	0.81917	0.75000
4	0.85668	0.80000
5	0.88127	0.83333
5	0.93607	0.90909

3 並・直列システム

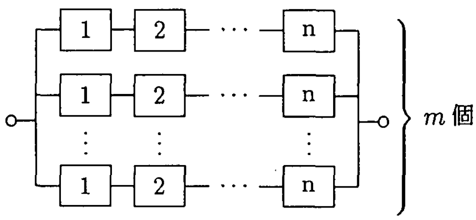

図 2: 並・直列システム

図 2 のように，n 個の直列システムが m 個並列になっている並・直列システムを考える．各ニットの信頼度を q $(0 < q < 1)$ とおくと，このシステムの信頼度は

$$R_{m,n}(q) = 1 - (1 - q^n)^m \tag{9}$$

となる．(9) 式で与えられる信頼度の性質を調べる．

(i) 明らかに，$\lim_{q\to 0} R_{m,n}(q) = 0$, $\lim_{q\to 1} R_{m,n}(q) = 1$ であるから，$R_{m,n}(q)$ は 0 から 1 までの q の単調増加関数である．

(ii) $0 < q < 1$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} R_{m,n}(q) = 0 \quad (m < \infty),$$
$$\lim_{m\to\infty} R_{m,n}(q) = 1 \quad (n < \infty). \tag{10}$$

(iii) $n \geq 2,\ 0 < q < 1$ に対して，

$$mq^n - \frac{m(m-1)}{2}q^{2n} < 1-(1-q^n)^m < mq^n. \tag{11}$$

であるから，

$$mq^n - R_{m,n}(q) < \frac{m(m-1)}{2}q^{2n}. \tag{12}$$

(iv) 次に，

$$R_{n,n}(q) = 1 - (1 - q^n)^n \tag{13}$$

の性質を調べる．(11) 式から，$0 < q < 1$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,n}(q) \leq \lim_{n\to\infty} nq^n = 0. \tag{14}$$

(v) (13) 式において，n の単調性を調べるため，

$$(1 - q^{n+1})^{n+1} = (1 - q^n)^n \tag{15}$$

を満たす q_n $(0 < q_n < 1)$ の値を求める．

明らかに，この値は，表 1 における p_n を q_n と置き換えればよい．故に，$0.618 < q < 1$ のもとで，$1-(1-q^n)^n$ は n の単調減少関数である．一般に，q はユニットの信頼度であるから，$q > 0.618$ である．以上から，$R_{n,n}(q) = 1-(1-q^n)^n$ は q から 0 までの n の単調減少関数である．

以上の性質をまとめると，(5) 式と (15) 式を比較することにより，$0.618 < q < 1$ に対して，

$$[1 - (1 - q)^n]^n \geq 1 - (1 - q^n)^n \tag{16}$$

であり，等号は $n = 1$ のとき成立する．明らかに，q が 1 に近いとき，直・並列システムの信頼度は並・直列システムの信頼度よりも大きい．

4 複雑性を考慮した直・並列システム

文献 [1] で直・並列システムの複雑度の信頼度を q^{n^m-1} と定義した．ここでは，ユニットの信頼度を q としたとき，複雑度を考慮したシステムの信頼度 [2] を

$$R_s(n) = e^{-\alpha(n^n-1)}[1-(1-q)^n]^n \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{17}$$

で与え，これを最大にする n^* を求める．表 1 に q と α に対して，$R_s(n)$ を最大にする n^* の値を示す．

表 3: 直・並列システムの最適数 n^*

	q		
α	$1-10^{-1}$	$1-10^{-2}$	$1-10^{-3}$
10^{-1}	1	1	1
10^{-2}	2	1	1
10^{-3}	2	2	1
10^{-4}	3	2	2
10^{-5}	4	2	2
10^{-6}	4	3	2
10^{-7}	5	3	2
10^{-8}	5	4	3

参考文献

[1] 中川覃夫，安井一民，“システムの冗長性に関する信頼性的考察”，電子情報通信学会論文誌，Vol. J80-A, No.12, pp.2184-2186, 1997.

[2] 中川覃夫，安井一民，“エントロピーを考慮したシステムの冗長度”，2000 年度 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集，pp.236-237, 2000.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．