2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

経路数え上げによるネットワーク構造システムの連結安定性の定量的評価方法

01002750 政策研究大学院大学政策研究科 大山達雄
01604870 政策研究大学院大学政策研究科 諸星穂積

1. はじめに

交通道路網を構成する道路ネットワーク、電力送配電網を構成する電力ネットワーク、都市ガス供給網を構成する都市ガスネットワーク、水道供給網を構成する水道ネットワーク、等々、ネットワーク構造を有するシステムはわれわれの日常生活の周囲にも数多く存在し、いずれもわれわれの生活にとって重要かつ不可欠なライフラインネットワークと呼ばれている。本稿では、このようなネットワークシステムの安定連結性を定義した上で、特殊な構造を有するいくつかのネットワークに対してそれを明示的に示し、それらの特性に関する結果を示す。

2. ネットワークの安定連結性

頂点集合を V、枝集合を E とするネットワーク $N=(V,E)$ において、頂点の個数、枝の本数をそれぞれ $|V|=n$, $|E|=m$ とする。またネットワーク $N=(V,E)$ の枝は無向枝とする。ネットワーク $N=(V,E)$ において、異なる2つの頂点を結ぶ経路は全部で $\frac{n(n-1)}{2}$ 組だけ存在する。いま m 本の枝のうち k 本を除去した場合に得られるネットワークにおいて、異なる2つの頂点を結ぶ経路の本数を $c_m(N,k)$ と表す。そして $c_m(N,k)$ の $c_m(N,0)$ に対する割合を $s_m(N,k)$ と表す。すなわち $K=\{1,2,\cdots,m\}$ に対して

$$(1)\qquad s_m(N,k)=\frac{c_m(N,k)}{c_m(N,0)}\qquad k\in K$$

とする。枝を全く除去しない場合の異なる2つの頂点を結ぶ経路の本数は $\frac{n(n-1)}{2}$ であるので、$c_m(N,0)=\frac{n(n-1)}{2}$ となる。したがって $s_m(N,k)$ については、次の関係が成立する。

$$(2)\qquad 0\le s_m(N,k)=\frac{2c_m(N,k)}{n(n-1)}\le 1\qquad k\in K$$

ここで注意すべきことは、一般に $c_m(N,k)$ あるいは $s_m(N,k)$ の値は1通りではない、すなわちネットワーク $N=(V,E)$ に対する k の関数 $S_m(N,k)=\{s_m(N,k)\}$ は1価関数ではない。ネットワーク $N=(V,E)$ の m 本の枝のうち k 本を除去する場合、除去の仕方によって得られる $s_m(N,k)$ の値は異なることがある。関数 $S_m(N,k)$ を安定連結関数と呼ぶことにする。

m 本の枝からなる単一経路グラフ、星型グラフ、閉路グラフをそれぞれ P_m, W_m, C_m、そして n 個の頂点からなる完全グラフ K_n と表す。

ネットワーク $N=(V,E)$ に対する関数 $S(N,k)$ の上側あるいは下側安定連結性を以下のように定義する。

$$\text{上側安定連結}\iff s_m(N,k)\ge 1-\frac{k}{m}\quad\text{for all }k$$

$$\text{下側安定連結}\iff s_m(N,k)\le 1-\frac{k}{m}\quad\text{for all }k$$

定理 1 P_3, W_3 は下側安定連結、C_3, K_4 は上側安定連結である。

k 本の枝からなる単一経路に対する任意の2頂点間の経路の本数を $S(k)$ 本と表すと、次の定理が成立する。

定理 2

$$(3)\qquad S(k_1)+S(k_2)\le S(k_1+k_2)$$

なお上の関係 (3) は2つのグラフが単一経路より一般的な木に対しても成立することを付け加えておこう。

ここで $s_m(N,k)$ の最大値と最小値をそれぞれ $\overline{s_m}(N,k)$、$\underline{s_m}(N,k)$ のように表す。このときいくつかの特殊なグラフに対しては、上記の関数が次の定理のように得られる。

定理 3 P_m, W_m, C_m に対しては、以下が成立する。

$$(4)\quad \overline{s_m}(P_m,k)=\frac{(k-m)(k-m-1)}{m(m+1)}$$

$$(5)\quad \underline{s_m}(P_m,k)=$$

$$(6)\quad s_m(W_m,k)=\overline{s_m}(P_m,k)$$

$$(7)\quad \overline{s_m}(C_m,k)=\begin{cases}1 & k=1\\ \overline{s_m}(P_{m-1},k-1) & k\ge 2\end{cases}$$

$$(8)\quad \underline{s_m}(C_m,k)=\begin{cases}1 & k=1\\ \underline{s_m}(P_{m-1},k-1) & k\ge 2\end{cases}$$

関係式 (4) は、m 本の枝からなる単一経路において k 本を除去した場合、総計 $m-k$ 本の枝からなる単一経路の集合が得られるが、このような単一経路の集合のうちで2頂点間の経路の本数が最大となるのは、定理2より $m-k$ 本の枝が単一経路をなす場合であることから

得られる。一方、関係式 (5) は、総計 $m-k$ 本の枝からなる単一経路の集合のうちで２頂点間の経路の本数が最小となるのは、定理２より $m-k$ 本の枝ができるだけ多くの個数の単一経路の集合に分割される場合であることから得られる。関係式 (7) は、m 本の枝のうち１本を除去した場合、$m-1$ 本の枝の単一経路が得られ、グラフが連結となることによる。２本以上を除去した場合、単一経路の場合と同様となる。

一般に C_m, W_m, P_m に対しては、次の定理が成立する。

定理 4 P_m, W_m は下側安定連結、C_m は上側安定連結である。

同一の枝の本数 m を有する２つのネットワーク $N=(V,E)$ と $T=(W,F)$ に対する２つの関数 $S(N,k)$ と $S(T,k)$ が与えられたとき、任意の $t \in S(N,k)$ に対して $t' \le t, t' \in S(T,k)$ が存在し、かつ任意の $t \in S(T,k)$ に対して $t \le t', t' \in S(N,k)$ が存在するとき

$$S(N,k) \succeq S(T,k) \tag{9}$$

と書くことにする。さらに、すべての $k \in K$ に対して式 (9) の関係が成立するとき

$$S_m(N) \succeq S'_m(N') \qquad k \in K \tag{10}$$

と書き、ネットワーク $N=(V,E)$ はネットワーク $T=(W,F)$ より上位安定連結であるという。以上の前提に基づくと、次の定理が成立する。

定理 5 $S_m(C_m) \succeq S_m(W_m) \succeq S_m(P_m)$

3. 安定連結関数の諸特性

実際のネットワークが与えられた場合、安定連結関数 $S_m(N,k)$ を求めるには、2^m 個のネットワークに対してすべての経路の本数を求めることになるので、膨大な計算量を要する。本節では、頂点の個数、枝の本数をそれぞれ $|V|=n$, $|E|=m$ とする任意の与えられたネットワーク $N=(V,E)$ に対して、安定連結関数 $S_m(N,k)$ に関する有用な情報を得るためのいくつかの手法について述べる。まず与えられたネットワーク $N=(V,E)$ においてすべての枝の容量を１（単位量）として、任意の一つの頂点をソースに選び、他のすべての頂点をシンクとする $n-1$ 個の最大ネットワークフロー問題を解く。このようにして得られたそれぞれの最小カットの容量を $T_i, i=1,\cdots,n-1$ とするとき、これらの最小値を $T_{min}=\min\{T_i\}$ と表す。このとき、安定連結関数 $S_m(N,k)$ において最大値が最初に 1.0 より小となるための枝の除去本数、そしてまた安定連結関数 $S_m(N,k)$ において最小値が最初に１より小となるための枝の除去本数については、次の定理が成立する。

定理 6

$$\max\{k|\overline{s_m}(N,k)=1\} = m-n+1 \tag{11}$$

$$\min\{k|\underline{s_m}(N,k)<1\} = T_{min} \tag{12}$$

頂点の個数 n、枝の本数 m のネットワーク $N=(V,E)$ に対して、m 本の枝のうちの k 本を除去する仕方の数は、m 個のものから k 個を取り出す場合の取り出し方の数 $C(m,k)=\frac{m!}{k!(m-k)!}$ だけ存在する。これらの枝の除去の仕方が同じ確率で発生するとした場合の $\{s_m(N,k)\}$ の期待値を $\tilde{s_m}(N,k)=E\{s_m(N,k)\}$ と表し、期待安定連結関数と呼ぶことにする。期待安定連結関数 $\tilde{S_m}(N,k)$ に対する期待安定連結性を安定連結関数の場合と同様に次のように定義する。

$$\text{上側期待安定連結} \iff \tilde{s_m}(N,k) \ge 1-\frac{k}{m} \ \text{for all } k$$

$$\text{下側期待安定連結} \iff \tilde{s_m}(N,k) \le 1-\frac{k}{m} \ \text{for all } k$$

上の定義に基づくと、安定連結関数が上（下）側安定連結ならば、上（下）側期待安定連結となることから、次の定理が直ちに得られる。

定理 7 P_m, W_m は下側期待安定連結、C_m, K_m は上側期待安定連結である。

3. 応用

本稿で取り上げたネットワークの連結安定性の定量的評価方法は、現実の電力、ガス、水道、道路、情報通信等のネットワーク構造システムの連結安定性を定量的に評価するのに利用可能である。すなわちそれぞれのネットワーク構造システムの一部分が故障、破壊、破損等によって利用不可能となったとき、システム全体としての連結安定性がどのように、そしてどの程度変化するかを定量的にみようとするものである。

参考文献

大内正俊, 大山達雄. "ライフラインの危機対応管理とOR", OR 学会春季研究発表会, 2000.

大山達雄. "ネットワーク構造システムの連結安定性の定量的評価方法", OR 学会春季研究発表会, 2000.