2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

k 回の取替を認める保証を考慮した予防取替方策

02800014 流通科学大学大学院 * 林坂 弘一郎 RINSAKA Koichiro
01204194 流通科学大学情報学部 三道 弘明 SANDOH Hiroaki
01400043 愛知工業大学 中川 覃夫 NAKAGAWA Toshio

1. はじめに

信頼性・保全性理論は Barlow and Proschan [1] 以来，長い歴史をもっている．これに対して，保証に関する研究は最近数十年間行われている [2]．このような状況の下，Iskandar and Sandoh [3] や Iskandar, Klefsjö and Sandoh [4] は，保証を考慮した機会-年齢取り替え政策を議論した．

また，著者らは保証期間中の 1 回目の故障で取替を行い，その後の故障で小修理を行う場合の予防取替方策を提案している [5], [6]．本研究では，保証期間中の最初の k 回の故障に対して取替を行う場合にこのモデルを拡張する．この上で，単位時間当たりの期待費用を最小化する最適取り替え時期について議論する．

2. モデル

本研究では以下のような問題を考える．システム導入後の保証期間を $(0,\tau]$ とする．保証期間中の $k(\geq 1)$ 回目までの故障に対して取替が無料で実施される．保証期間中の $k+1$ 回目以降の故障については小修理が無料で実施される．保証期間後 $(\tau,T]$ に起こった故障に対しては，小修理が $c_2(>0)$ の費用で実施される．

一方，保証期間中 $(0,\tau]$ に一切故障しない場合，保証期間後 $(\tau,T]$ の故障に対しても c_2 の費用で小修理が実施される．

予防取り替え費用を $c_1(>0)$ とし，システムが最初の購入から時刻 $T(\geq\tau)$ になった時点で予防取り替えを行うものとする．この方策の下で，単位時間当たり期待費用 $C(T)$ を最小にする予防取り替え時期 $T=T^*$ を考える．

3. 期待費用

ここでは，時刻 T で予防取り替えを行うときの，単位時間当たり期待費用を定式化する．システムの故障時に小修理のみを実施するときに，時刻 t までの故障回数を $\{N(t), t\geq 0\}$ で表す．$N(t)$ は平均値関数 $H(t)$ の非同次ポアソン過程に従うと仮定する．

保証期間中 $(0,\tau]$ に一切故障しない場合，$(\tau,T]$ での平均故障回数 N_0 は次式となる．

$$N_0=[H(T)-H(\tau)]e^{-H(\tau)} \tag{1}$$

保証期間中 $(0,\tau]$ で丁度 i 回故障する場合，$(\tau,T]$ での平均故障回数 $N_i(i=1,2,\cdots,k-1)$ は

$$\begin{aligned} N_i &= \int_0^\tau [H(T-x)-H(\tau-x)]\,f^{(i)}(x) \\ &\quad \times e^{-H(\tau-x)}dx, \quad i=1,2,\cdots,k-1 \end{aligned} \tag{2}$$

となる．ここに，$f^{(i)}(x)$ は密度関数 $f(x)$ の i 重たたみこみである．更に，保証期間中 $(0,\tau]$ に少なくとも k 回故障する場合，$(\tau,T]$ での平均故障回数 M_k は

$$M_k=\int_0^\tau [H(T-x)-H(\tau-x)]\,f^{(k)}(x)dx \tag{3}$$

となる．よって，保証期間後の平均故障回数は次式で与えられる．

$$N_0+\sum_{i=1}^{k-1}N_i+M_k \tag{4}$$

したがって，時刻 T で予防取替を実施する場合の単位時間当たり期待費用 $C(T)$ は

$$C(T)=\frac{c_1+c_2\left(N_0+\sum_{i=1}^{k-1}N_i+M_k\right)}{T}, \quad \tau\geq T \tag{5}$$

で与えられる [7]．なお，式 (5) において，$\tau=0$ とすると従来の小修理のみのモデルに一致し，$k=1$ とすると保証期間中の最初の故障で取替を行うモデル [5], [6] に一致する．

4. 最適取り替え時期

ここでは，先に定式化した単位時間当たり期待費用を最小にするという意味での最適な予防取り替え時期 $T=T^*$ に関する解析を行う．

保証期間終了と同時に予防取り替えを行うときの期待費用は

$$C(\tau) = \frac{c_1}{\tau} \tag{6}$$

となる．また，保証期間後の予防取り替えを行わず，小修理のみ実施する場合の期待費用は

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to+\infty} C(T)\\
&= \lim_{T\to+\infty} c_2\Bigg\{h(T)e^{-H(\tau)}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau} h(T-x)f^{(i)}(x)e^{-H(\tau-x)}dx\\
&\quad + \int_0^{\tau} h(T-x)f^{(k)}(x)dx\Bigg\}\\
&= +\infty
\end{aligned} \tag{7}$$

となる．ただし，以下を仮定する．

$$h'(t) > 0 \tag{8}$$

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty \tag{9}$$

$C(T)$ を T に関して微分すると，$C'(T) \geq 0$ は

$$\begin{aligned}
&[Th(T) - H(T) + H(\tau)]\,e^{-H(\tau)}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau}[Th(T-x) - H(T-x)\\
&\qquad + H(\tau-x)]f^{(i)}(x)e^{-H(\tau-x)}dx\\
&\quad + \int_0^{\tau}[Th(T-x) - H(T-x)\\
&\qquad + H(\tau-x)]f^{(k)}(x)dx \geq \frac{c_1}{c_2}
\end{aligned} \tag{10}$$

に等価である．不等式 (10) の左辺を $L(T)$ とおくと

$$\begin{aligned}
L(\tau) &= \tau\Bigg[h(\tau)e^{-H(\tau)}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau} h(\tau-x)f^{(i)}(x)e^{-H(\tau-x)}dx\\
&\quad + \int_0^{\tau} h(\tau-x)f^{(k)}(x)dx\Bigg]
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
L'(T) &= T\Bigg[h'(T)e^{-H(\tau)}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau} h'(T-x)f^{(i)}(x)e^{-H(\tau-x)}dx\\
&\quad + \int_0^{\tau} h'(T-x)f^{(k)}(x)dx\Bigg] > 0
\end{aligned} \tag{12}$$

である．

以上の解析結果より，$C(T)$ を最小にする $T = T^*$ は以下の場合分けの下で議論される．

（1） $L(\tau) < c_1/c_2$.
このとき，$C(T)$ は減少から増加に唯一度だけ変化する．すなわち，有限の T^* が唯一存在し，

$$\begin{aligned}
&C(T^*)\\
&= c_2\Bigg[h(T^*)e^{-H(\tau)}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}\int_0^{\tau} h(T^*-x)f^{(i)}(x)e^{-H(\tau-x)}dx\\
&\quad + \int_0^{\tau} h(T^*-x)f^{(k)}(x)dx\Bigg]
\end{aligned} \tag{13}$$

（2） $L(\tau) \geq c_1/c_2$.
このとき，$C(T)$ は単調増加関数である．したがって，$T^* = \tau$ であり，

$$C(T^*) = \frac{c_1}{\tau} \tag{14}$$

である．

なお，紙数の都合上，数値例は当日発表させて頂く．

参考文献

[1] Barlow, R.E. and Proschan, F. : *Mathematical Theory of Reliability,* Wiley, New York, (1965).

[2] Blischke, W.R. and Murthy, D.N.P. : *Warranty Cost Analysis,* Marcel Dekker, Inc., New York, (1994).

[3] Iskandar, B.P. and Sandoh, H. : An Opportunity-based Age Replacement Policy Considering Warranty, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, Vol. 6, No. 3, pp. 229-236 (1999).

[4] Iskandar, B. P., Klefsjö, B. and Sandoh, H. : An Opportunity-based Age Replacement Policy with Warranty Analyzed by using TTT-transforms, *International Journal of Reliability and Applications*, Vol. 1, No. 1 pp. 27-38 (2000).

[5] 林坂弘一郎，三道弘明，中川覃夫：1回の取り替えを含む保証の下での年齢取り替え方策，日本 OR 学会秋期研究発表会アブストラクト集，pp. 58-59 (2000).

[6] Rinsaka, K., Sandoh, H. and Nakagawa, T. : Age replacement policy considering warranty with one corrective replacement and minimal repairs, *Abstracts of the 32nd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications*, Tottori, Japan, pp. 60-61 (2000).

[7] Ross, S.M. : *Applied Probability Models with Optimization Applications,* Holden-Day, San Francisco, (1970).