2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ニュートン型手法の局所収束性について

京都大学　*山下 信雄　YAMASHITA Nobuo
福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1　はじめに

非線形方程式

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

の解法として，ニュートン法およびその派生手法は非常に有効である．F は R^n から R^n への連続的微分可能な関数とし，以下では問題 (1) の解集合 $X \subseteq R^n$ は空でないとする．

これまでに提案されている多くのニュートン型手法は，問題 (1) の解における $F'(x)$ の正則性の仮定の元で，超一次収束することが保証されていたが，最近，$F'(x)$ の正則性が成り立たなくても，超一次収束する手法が提案されている [1, 2, 3]．そのような手法では，$F'(x)$ の正則性の代わりに，F が局所的にエラーバウンドとなることを必要としている．ここで，局所的エラーバウンド性は以下のように定義されている性質である．

定義 1.1 $N \subseteq R^n$ かつ $X \cap N \neq \emptyset$ とする．このとき次の不等式を満たす正の定数 a が存在するとき，F は集合 N 上で方程式 (1の局所的エラーバウンドを与えるという．

$$a \operatorname{dist}(x, X) \leq \|F(x)\| \quad \forall x \in N$$

ある解 $\hat{x}$ において $F'(x)$ が正則であれば，$\hat{x}$ は問題 (1) の孤立解であり，F は点 $\hat{x}$ の適当な近傍上で局所的エラーバウンドとなる．その逆は必ずしも成立しないので，F が局所的エラーバウンドとなるという条件は，解における $F'(x)$ の正則性よりも緩い条件である．

本発表では，まず，[1, 3] で提案されている手法が共通に持っている次の性質に着目する．

$$\begin{aligned} \|d^k\| &= O(\|F(x^k)\|) \\ \|F'(x^k)d^k + F(x^k)\| &= o(\|F(x^k)\|) \end{aligned}$$

ここで，点列 $\{x^k\}$ は $x^{k+1} := x^k + d^k$ で生成されているとする．次に，上記のような性質をもつ点列が，F の局所的エラーバウンド性の元で，超一次収束することを示す．さらに，Levenberg-Marquardt 法 (LM 法)，正則化法, 内点法によって生成された点列が，上記の性質を持つための十分条件を与える．

2　Newton 型点列とその収束性

この節では，本発表で考察するニュートン型点列の定義を行い，その点列の収束性を議論する．

ます，ニュートン型点列を以下のように定義する．

定義 2.2 点列 $\{(x^k, d^k)\}$ が以下の性質を満たすとき，点列 $\{(x^k, d^k)\}$ をニュートン型点列と呼ぶ．

$$\|d^k\| = O(\|F(x^k)\|) \tag{2}$$

$$\|F'(x^k)d^k + F(x^k)\| = o(\|F(x^k)\|) \tag{3}$$

さらに次の条件が成り立つとき，点列 $\{(x^k, d^k)\}$ を強ニュートン型点列と呼ぶ．

$$\|F'(x^k)d^k + F(x^k)\| = O(\|F(x^k)\|^2) \tag{4}$$

この定義において，条件 (2) は $\|F(x^k)\|$ が小さくなるような解の十分そばでは，$\|d^k\|$ も小さくならなければならないことを意味している．条件 (3) は，d^k とニュートン方向 $d_N^k := -F'(x^k)^{-1}F(x^k)$ とのずれが，小さくなければならないことを意味している．

次に，ニュートン型点列の収束性を議論する．そのために，まず F に対する微分可能性の仮定を与える．

仮定 2.1 F は微分可能で，F' は局所的リプシッツ連続である．

この仮定のもとで，次の定理が成り立つ．

定理 2.1 $\{(x^k, d^k)\}$ をニュートン型点列とし，$\{x^k\}$ は有界とする．さらに，仮定 *2.1*が成り立つとする．このとき，$\|F(x^0)\|$ が十分小さければ，点列 $\{\|F(x^k)\|\}$ は *0* に超一次収束する．さらに，$\{(x^k, d^k)\}$ が強ニュートン型点列であれば，点列 $\{\|F(x^k)\|\}$ は *0* に *2* 次収束する．

証明． $\{x^k\}$ の有界性と仮定 2.1より，

$$\|F(x^k + d^k)\| \leq \|F'(x^k)d^k + F(x^k)\| + c\|d^k\|^2$$

となる正の定数 c が存在する．$\{(x^k, d^k)\}$ はニュートン型点列なので，

$$\|F(x^{k+1})\| \leq o(\|F(x^k)\|) + O(\|F(x^k)\|^2)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

となる．よって，$\|F(x^0)\|$ が十分小さければ，点列 $\{\|F(x^k)\|\}$ は 0 に超一次収束する．定理の後半も同様にして証明することができる． □

次に，点列 $\{x^k\}$ の超一次収束性を示す．

定理 2.2 $\{(x^k, d^k)\}$ をニュートン型点列とする．さらに，仮定 *2.1* が成り立ち，F は $\Omega(x^0) \cap X \neq \emptyset$ であるような x^0 のある近傍 $\Omega(x^0)$ 上で *(1)* の局所的エラーバウンドを与えるとする．このとき，$\|F(x^0)\|$ が十分小さければ，点列 $\{\mathrm{dist}(x^k, X)\}$ は *0* に超一次収束する．さらに，$\{(x^k, d^k)\}$ が強ニュートン型点列であれば，点列 $\{\mathrm{dist}(x^k, X)\}$ は *0* に *2* 次収束する． □

3 ニュートン型点列を与えるアルゴリズム

ここでは，LM 法，正則化法，内点法がニュートン型点列を生成するための条件を与える．

3.1 LM 法

LM 法の探索方向 d_{LM}^k は，線形方程式

$$(F'(x^k)^T F'(x^k) + \mu_k I)d = -F'(x^k)^T F(x^k) \tag{5}$$

の解として与えられる．ここで $\{\mu_k\}$ は非負のスカラー列である．

LM 法に対して次の定理が示すことができる．

定理 3.3 *[3]* 仮定 *2.1* が成り立ち，F は $\Omega(x^0) \cap X \neq \emptyset$ であるような x^0 のある近傍 $\Omega(x^0)$ 上で *(1)* の局所的エラーバウンドを与えるとする．さらに，各 k に対して $\mu_k := \|F(x^k)\|^2$ であるとする．もし，x^0 が十分解に近ければ，点列 $\{(x^k, d_{LM}^k)\}$ は強ニュートン型点列となる． □

[1] では，線形方程式 (5) を正確に解かなくても，LM 方によって生成される点列 $\{(x^k, d_{LM}^k)\}$ がニュートン型点列となることが示されている．

3.2 正則化法

正則化法は，線形方程式

$$(F'(x^k) + \mu_k I)d = -F(x^k)$$

の解 d_R^k を探索方向とする手法である．ここで $\{\mu_k\}$ は非負のスカラー列である．F が単調関数で $\mu^k > 0$ のとき，行列 $F'(x^k) + \mu_k I$ は正則となり，d_R^k を一意に求めることができる．

次に，正則法で生成される点列 $\{(x^k, d_R^k)\}$ がニュートン型点列となる条件を与える．

定理 3.4 次の不等式が成り立つとする．仮定 *2.1* が成り立ち，F は $\Omega(x^0) \cap X \neq \emptyset$ であるような x^0 のある近傍 $\Omega(x^0)$ 上で *(1)* の局所的エラーバウンドを与えるとする．さらに次の不等式が成り立つとする．

$$\|(F'(x^k) + \mu_k I)^{-1}\| \leq O\left(\frac{1}{\|F(x^k)\|}\right) \tag{6}$$

もし，x^0 が十分解に近ければ，点列 $\{(x^k, d_R^k)\}$ はニュートン型点列である． □

F が単調関数で $\mu_k = \|F(x^k)\|$ のとき，この定理の仮定 (6) は成り立つ．

3.3 内点法

内点法は，本来，凸計画問題の解法であるが，一方で，凸計画問題の Karush-Kurn-Tucker 条件から導出される方程式系に対するニュートン法と一種と考えることができる．そのため，主双対内点法によって生成される点列についても，ニュートン型点列となるかどうかを議論することができる．なお，紙面の都合上，詳細は当日発表する．

参考文献

[1] H. Dan, N. Yamashita and M. Fukushima, Convergence properties of the inexact Levenberg-Marquardt method under local error bound, Technical Report 2001-001, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University (January 2001).

[2] P. Tseng, Error bounds and superlinear convergence analysis of some Newton-type methods in optimization, to appear in *Applications and Algorithms of Complementarity*, M.C. Ferris, O.L. Mangasarian and J.-S. Pang (eds.), Kluwer Academic Publishers.

[3] N. Yamashita and M. Fukushima, On the rate of convergence of the Levenberg-Marquardt method, to appear in *Computational Optimization and Applications*.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．