2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

二次錘相補性問題に対するメリット関数について

京都大学情報学研究科　*林 俊介　HAYASHI Shunsuke
京都大学情報学研究科　山下 信雄　YAMASHITA Nobuo
京都大学情報学研究科　福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1 序論

二次錐相補性問題 (Second-Order-Cone Complementarity Problem : SOCCP) は，以下のように表される．

$$\begin{aligned} &\text{Find} \quad (x,y,\zeta) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^l \\ &\text{s.t.} \quad x^T y = 0,\ x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{K},\ F(x,y,\zeta) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，$F : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^l \to \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^l$ であり，$\mathcal{K}$ は n_i 次の二次錐

$$\mathcal{K}^{n_i} = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^{n_i - 1} \mid \|z_2\| \le z_1 \right\} \tag{2}$$

を用いて $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$ で定義される凸錐である．(但し，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$，$\|\cdot\|$ はユークリッドノルムである．)

二次錐計画問題 (Second-Order-Cone Programming : SOCP)[3] の Karush-Kuhn-Tucker 条件は SOCCP になっている．また，$n_1 = n_2 = \cdots = n_m = 1$, $F(x,y,\zeta) = G(x) - y$ のとき，(1) は非線形相補性問題 (Nonlinear Complementarity Problem : NCP)

$$\begin{aligned} &\text{Find} \quad x \in \mathcal{R}^n \\ &\text{s.t.} \quad x \ge 0,\ G(x) \ge 0,\ x^T G(x) = 0 \end{aligned}$$

となる．これらのことより，SOCCP は SOCP や NCP を含む重要なクラスの問題であることが分かる．

これまで SOCCP や NCP に対して多くの解法が提案されている．その中でも特に注目を集めているのが，それらの問題を等価な最適化問題

$$\min \ \psi(x) \tag{3}$$

に再定式化して解く手法である．この最適化問題の目的関数 ψ をメリット関数という．

このメリット関数に望まれる性質として，強圧性がある．関数 ψ が強圧的 (coersive) であるということは，$\limsup_{k\to\infty} \|x^{(k)}\| = \infty$ を満たすすべての実ベクトル列 $\{x^{(k)}\}$ に対し，

$$\limsup_{k\to\infty} \|\psi(x^{(k)})\| = \infty \tag{4}$$

となることである．メリット関数が強圧的であれば，そのレベル集合が有界となる．よって，最適化問題 (3) をに対する適当な降下法で生成される点列は集積点を持つ．なお，これまでの研究で，NCP に対して提案されたメリット関数の多くが，G の強単調性の元で強圧的であることが示されている．

最近，福島, Luo, Tseng[1] は，NCP に対するメリット関数が SOCCP にも拡張できることを示した．しかし，NCP と違い，SOCCP のメリット関数には未だに調べられていない性質も多い．そこで，本発表では特に，SOCCP に対するメリット関数が強圧性を持つ条件を調べる．

2 Jordan 代数

ここでは，SOCCP のメリット関数の定義や，その性質の解析に必要な Jordan 代数を紹介する．

2.1 Jordan 積と単位ベクトル

$x = (x_1, x_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^{n-1}$ と $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^{n-1}$ の Jordan 積 $x \cdot y$，および，Jordan 代数における単位ベクトル e は以下のように定義される．

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x^T y,\ y_1 x_2 + x_1 y_2), \\ e &= (1, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

また，Jordan 積に対して，以下の性質が成り立つ．

1.	$e \cdot x = x$	単位元の存在
2.	$x \cdot y = y \cdot x$	交換律
3.	$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$	分配律

なお，結合律は一般的には成り立たないため，環としての性質は持たない．また，

$$\begin{aligned} & x^T y = 0,\ x \in \mathcal{K}^n,\ y \in \mathcal{K}^n \\ & \iff x \cdot y = 0,\ x \in \mathcal{K}^n,\ y \in \mathcal{K}^n \end{aligned}$$

が成り立つ（証明は [1] 参照）ので，(1) 式における制約条件の $x^T y = 0$ は，$x \cdot y = 0$ におきかえることができる．

2.2 スペクトル分解

すべての $x \in \mathcal{R}^n$ に対して，以下のようにスペクトル分解を定義する．

$$x = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)}.$$

ここで，λ_1, λ_2 はスペクトル値，$u^{(1)}, u^{(2)}$ はスペクトルベクトルといい，

$$\begin{aligned} \lambda_i &= x_1 + (-1)^i \|x_2\|, \\ u^{(i)} &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1, (-1)^i \frac{x_2}{\|x_2\|}\right) & (x_2 \ne 0), \\ \frac{1}{2}(1, (-1)^i w) & (x_2 = 0), \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる．但し，$w \in \mathcal{R}^{n-1}$ は $\|w\|=1$ を満たす任意のベクトルである．スペクトル分解は，与えられたベクトルを二次錐の表面に射影して線形分離したものと考えられる．また，以下のような性質を満たすことが知られている．

1. $u^{(1)} \cdot u^{(2)} = 0,\ \|u^{(1)}\| = \|u^{(2)}\| = 1/\sqrt{2}.$
2. $u^{(i)} \cdot u^{(i)} = u^{(i)},\ i = 1, 2.$
3. $\lambda_1 \geq 0$ and $\lambda_2 \geq 0 \iff x \in \mathcal{K}^n.$
4. $g(x) = \hat{g}(\lambda_1)u^{(1)} + \hat{g}(\lambda_1)u^{(2)}.$

ここで，4. における $\hat{g}$ は，$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ に対して $\hat{g}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha^k$ で定義される実数値関数である．但し，x^k は x の Jordan 積を k 回とったものである．

3 メリット関数

SOCCP に対するメリット関数を構成するために，次のような性質をもつ関数 $\phi: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ を考える．なお，以下では簡単のため，SOCCP(1) において，$m=1$ すなわち $\mathcal{K} = \mathcal{K}^n$ と仮定しておく．

$$\phi(x, y) = 0 \iff x \cdot y = 0,\ x \in \mathcal{K}^n,\ y \in \mathcal{K}^n \tag{5}$$

この性質 (5) を満たす関数の一つとして，次の残差関数 ϕ_{NR} がある．これは，

$$\begin{aligned} \phi_{NR}(x, y) &= x - [x - y]_+ \\ &= x - \left([\kappa_1]_+ v^{(1)} + [\kappa_2]_+ v^{(2)}\right) \end{aligned}$$

で与えられる関数である．但し，κ_i と $v^{(i)}$ はそれぞれ，$x - y$ のスペクトル値とスペクトルベクトルで，$[\kappa_i]_+ = \max(0, \kappa_i)$ である．これを用いてメリット関数 ψ を，

$$\psi(x, y, \zeta) = \frac{1}{2}\|\phi_{NR}(x, y)\|^2 + \|F(x, y, \zeta)\|^2 \tag{6}$$

で定義すると，メリット関数 $\psi(x, \zeta)$ の制約無し最小化問題が，SOCCP(1) と等価になる．

4 メリット関数の強圧性

これまで NCP に対する様々なメリット関数の性質は深く研究されてきた．しかし，SOCCP のに対するメリット関数の性質はまだあまり研究されていない．そこで，本研究では SOCCP に対するメリット関数 (6) の強圧性について解析を行なう．

定理 1 $x, y \in \mathcal{R}^n$ とし，F は $G: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ を用いて，$F(x, y, \zeta) = G(x) - y$ と定義されているものとする．このとき G が強単調，すなわちある正の数 ϵ が存在し，$\forall x,\ y \in \mathcal{R}^n$ に対し

$$(x - y)^T (G(x) - G(y)) \geq \epsilon \|x - y\|^2$$

が成り立つならば，メリット関数

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}\|\phi_{NR}(x, y)\|^2 + \|G(x) - y\|^2$$

は強圧性を持つ．

このメリット関数 (6) は 2 回微分可能ではないため，ニュートン法などは使えない．そこで福島, Luo, Tseng [1] は，Chen と Mangasarian [2] の提案した NCP に対する平滑化のアイディアを SOCCP に拡張して，残差関数 ϕ_{NR} の平滑化関数として次の関数を提案した．

$$\phi_\mu(x, y) = x - \mu g((x - y)/\mu).$$

$g(x)$ は $\hat{g}(\alpha)$ が $\lim_{\alpha \to -\infty} \hat{g}(\alpha) = 0,\ \lim_{\alpha \to \infty}(\hat{g}(\alpha) - \alpha) = 0,\ 0 < \hat{g}'(\alpha) < 1$ を満たすようなベクトル値関数である．また，$\lim_{\mu \to 0} \phi_\mu(x, y) = \phi_{NR}(x, y)$ が成り立つことが [1] で証明されている．

この平滑化関数に対して定理 1 を用いることにより，強圧性を示すことができる．

系 1 $x, y \in \mathcal{R}^n$ とし，F は $G: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ を用いて，$F(x, y, \zeta) = G(x) - y$ と定義されているものとする．このとき G が強単調ならば，$\frac{1}{2}\|\phi_\mu(x, y)\|^2 + \|G(x) - y\|^2$ は強圧性を持つ．

5 まとめと今後の課題

本研究で，SOCCP に対するメリット関数が，強単調性の仮定の元で強圧性を持つということを示した．このことは，レベル集合が有界であることも意味するので，適当な降下法で生成される点列が集積点を持つことが保証される．また，この結果は正則化法に応用することもできる．

今後の課題としては，強単調の仮定をより緩くした条件でのメリット関数の強圧性を解析することや，エラーバウンド性を解析，および，実際にそれらを用いたアルゴリズムを構成することなどが挙げられる．

参考文献

[1] M. Fukushima, Z.-Q. Luo, P.Tseng, *Smoothing Functions for Second-Order-Cone Complementarity Problems*, Technical Report 2000-009, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, November 2000.

[2] C. Chen and O. L. Mangasarian, *A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems*, Computational Optimization and Applications, Vol. 5, 1996, pp. 97-138.

[3] M.S.Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd and H. Lebret, *Applications of second-order cone programming*, Linear Algebra and Its Applications, Vol. 284, 1998, pp. 193-228.